

THÈSE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

ALAIN J. PHARÈS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

*Sujet de la thèse : ELECTRODYNAMIQUE DES PARTICULES DE SPIN 1
TRAITÉES DANS LE CADRE DE LA THÉORIE DES SOURCES*

Soutenue le 23 Juin 1971 devant la Commission d'Examen :

MM. P. SOLEILLET

Président

J. L. DESTOUCHES }

VU DUY CHAN }

Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556014_0016

THÈSE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

ALAIN J. PHARÈS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

es

p²

*Sujet de la thèse : ELECTRODYNAMIQUE DES PARTICULES DE SPIN 1
TRAITÉES DANS LE CADRE DE LA THÉORIE DES SOURCES*

Soutenue le 23 Juin 1971 devant la Commission d'Examen :

MM. P. SOLEILLET

Président

J. L. DESTOUCHES }

VU DUY CHAN }

Examineurs



P L A N

- I - Introduction
- II- Les principes fondamentaux de la théorie des sources
 - 1. Introduction
 - 2. Les particules de spin 0
 - 3. Les particules de spin 1 - Le photon
 - 4. Les principes variationnels de l'action $W(S)$
- III- Présentation générale des fonctions de propagation des particules vectorielles.
 - 1. Fonction de propagation libre
 - 2. Fonction de propagation modifiée
- IV - La plus simple modification de la fonction de propagation des particules de spin 1
- V - Etude de la fonction de propagation modifiée des particules de spin 1
 - 1. Comportement asymptotique pour les valeurs élevées de p^2
 - 2. Recherche des singularités le long de l'axe réel
 - 3. Recherche des singularités dans le plan complexe
 - 4. Détermination de la fonction causale de propagation
- VI - La plus simple modification de la fonction de propagation du photon (Création de pair de particules vectorielles)
- VII- Création de pair de particules vectorielles - Corrections radiatives.
- VIII-Bibliographie

I - Introduction

Depuis 1966, Schwinger⁽¹⁻⁶⁾ a développé une nouvelle théorie des particules, la "théorie des sources". Cette théorie retient les caractéristiques essentielles de ce que réalise l'expérimentateur dans son laboratoire. Elle a été appliquée à des domaines extrêmement variés, mais nous retiendrons uniquement son application à l'électrodynamique.

L'électrodynamique du spin 1 est une théorie non renormalisable au sens de la théorie des champs. Il est fait plusieurs spéculations pour la rendre renormalisable, tel que l'introduction de champs régulateurs et d'espaces à métrique négative⁽⁷⁻⁸⁾. Tout récemment, il a même été proposé l'utilisation de la théorie des "pôles fantômes". Il semble que, dans une telle théorie, les propriétés d'unitarité et de covariance soient mises en doute⁽⁹⁾.

Une fois le problème envisagé sous l'angle de la théorie des sources, unitarité, covariance et métrique positive sont assurés dès le départ. Voilà pourquoi, nous donnons une présentation générale des principes fondamentaux de la théorie des sources, en spécialisant les résultats aux sources vectorielles.

Etant donné que notre travail porte essentiellement sur les particules de spin 1, nous donnons une présentation originale des fonctions de propagation modifiée de ces particules. Nous mettons en évidence des fonctions spectrales devant être obliga-

toirement réelles et non négatives.

Nous spécialisons ensuite notre calcul au cas de la plus simple modification de la fonction de propagation, en tenant compte des termes dus aux émissions radiatives de la source. Le résultat obtenu montre:

- 1) des fonctions spectrales non négatives
- 2) des intégrales spectrales sans divergence infra-rouge
- 3) un comportement asymptotique de la fonction de propagation de la forme $[1/(p^2)^2 \text{Log } p^2]$. Ce résultat est en parfaite concordance avec les résultats expérimentaux. En effet, les interactions électromagnétiques des hadrons donnent lieu à une résonance mésonique 1^- . La mesure du facteur de forme, qui est proportionnel à la fonction de propagation de l'état résonnant 1^- , a montré un comportement asymptotique du type que nous venons d'obtenir.

Le succès des résultats obtenus, nous pousse alors à l'étude des singularités de la fonction de propagation modifiée. En effet, il est indispensable de vérifier qu'aucune anomalie n'est observée. Nous mettons en évidence l'existence d'une coupure le long de l'axe réel allant de $-m^2$ à $-\infty$, et de quatre pôles complexes, symétriques deux à deux par rapport à l'axe réel, mis à part, bien entendu, du pôle simple à $-p^2 = m^2$. Il est alors démontré que ces pôles complexes sont physiquement acceptables, en ce sens qu'ils correspondent à des particules très instables, et, en fait, impossible à détecter. Les singularités ayant été déterminées, nous évaluons la fonction causale de propagation. Six termes distincts sont alors mis en évidence, le premier

correspondant au pôle simple, le second à la coupure, et les quatre derniers aux pôles complexes. C'est alors que nous utilisons pour la première fois, la notion d'impulsion "complexe", dont seule la composante énergétique peut être complexe. Cette notion revêtira un caractère essentiel dans la dernière partie de notre étude.

Nous passons ensuite à l'étude de création de paires de particules vectorielles, et à l'étude de la fonction de propagation modifiée du photon, qui lui correspond. Nous constatons alors, que la fonction de propagation comporte une intégrale spectrale logarithmiquement divergente, si nous nous limitons à la prescription "minimale" de termes de contact. Un seul terme de contact supplémentaire est suffisant pour lever la divergence. Toutefois, si nous tenons à garder la prescription "minimale", l'idée serait de dire que le processus réel doit tenir compte du fait qu'une particule chargée, déviant de sa trajectoire, peut émettre des radiations. Alors, il faudrait remplacer la fonction de propagation de chaque particule chargée par celle que nous avons calculée précédemment. Ceci fait l'objet du dernier chapitre de notre étude.

En calculant la nouvelle modification de la fonction de propagation photonique, nous mettons en évidence la possibilité d'étendre la notion de source, en permettant à celle-ci d'émettre et d'absorber des énergies complexes. Ce point de vue ouvre des perspectives nouvelles à la théorie des sources et mérite d'être investigué de plus près. Toutefois, si nous éliminons de nos calculs la possibilité d'émission et de détection

d'énergies complexes, nous démontrons de façon explicite que nous avons la même divergence que précédemment. La question d'utiliser la notion généralisée de sources, pour éliminer cette divergence, demeure encore un problème non résolu.

II - Les principes fondamentaux de la théorie des sources

1 - Introduction

La théorie des sources est une théorie à caractère essentiellement phénoménologique. Elle permet de décrire les particules observées, qu'elles soient stables ou instables : il n'est fait aucune spéculation au sujet de la structure interne des particules. Par contre cette théorie laisse la voie ouverte à la possibilité d'une théorie plus fondamentale. Ainsi, il n'est donné aucune définition abstraite de la particule, la théorie des sources utilise plutôt une description symbolique de ce qui donne un sens physique au concept de particule.

La théorie est basée sur l'invariance relativiste dans l'espace-temps, mais la question d'une limitation de la description microscopique de l'espace-temps reste toujours possible, la réponse ne pouvant être donnée que par l'expérience.

La description complémentaire dans l'espace des impulsions joue un rôle important, mais il n'est fait aucune hypothèse d'analyticité. Causalité et uniformité dans l'espace-temps sont les principes de base de la théorie des sources, qui est, de ce fait, une théorie en position intermédiaire entre la théorie quantique des champs et la théorie de la matrice S de diffusion.

Grâce aux découvertes de plus en plus nombreuses des vingt dernières années, le terme de "particule" a été systématiquement étendu. Partant de l'électron et du proton comme particules stables en passant par le neutron à longue durée de vie, puis le méson π et les particules très instables, telles que p et N^* , l'on a une progression constante vers des énergies de plus en plus élevées et des durées de vie de plus en plus courtes.

Il est donc évident qu'une particule doit tout d'abord être créée pour être ensuite étudiée. Nous pouvons ainsi considérer toute création de particule comme étant le fait d'une collision. C'est en effet le cas des particules produites dans les accélérateurs. Une telle collision a lieu dans une certaine région limitée et plus ou moins contrôlée de l'espace-temps, où des particules se combinent pour produire les propriétés caractérisant la particule en question. Il est à remarquer d'ailleurs qu'une nouvelle résonance mise à jour n'est admise comme telle, que si elle a été observée avec exactement les mêmes caractéristiques dans plusieurs réactions différentes.

Ainsi, si une particule est définie par les collisions qui lui donnent naissance, les détails entrant en jeu dans chacune des réactions n'ont plus d'importance, en ce sens que l'on peut idéaliser le rôle des autres particules participant à la collision et remarquer que leur fonction est uniquement de produire exactement les propriétés requises à la création de la particule. Ils constituent la SOURCE pour la particule considérée. Toutefois, nous retenons le fait que la source occupe une certaine région localisée dans l'espace-temps et est caractérisée par une certaine

fonction numérique $S(x)$. Sa possibilité de produire certaines impulsions est mesurée par une fonction $S(p)$. Ces deux fonctions ne peuvent être indépendantes, elles doivent satisfaire le principe de complémentarité de la mécanique quantique.

Nous avons parlé de la création de particules, mais il est aussi important de considérer le processus de détection de ces mêmes particules. En générale, nous pouvons dire que la particule émise à la suite d'une collision, a été absorbée à la suite du processus de détection. Dans ce cas également, ce sont des phénomènes de collision qui ont lieu, et, en principe, ces collisions comportent des mécanismes analogues à ceux de création. De plus, la détection a lieu dans une région parfaitement localisée et controlable de l'espace-temps. Ainsi les processus de collision utilisés pour la détection de la particule peuvent être idéalisés et représentés comme des puits. Il est clair que puit et source ne sont que deux aspects différents de la ^{même} idéalisation, et nous les réunissons sous la même terminologie de "SOURCE".

Nous allons procéder de façon à donner au concept de source une structure quantitative, en commençant par la description des particules scalaires et stables.

2 - Particules de spin-0

Le processus le plus élémentaire que nous puissions envisager est le suivant : Avant que la source d'émission n'entre en action, nous avons l'état du vide $|0-\rangle$. La source entre alors en action, émettant tout au plus une particule, qui se propage dans l'espace-temps jusqu'à atteindre la source d'absorption, où elle est détectée. Après cela, nous retrouvons l'état du vide $|0+\rangle$. L'amplitude d'émission de la particule s'écrit $\langle 1|0-\rangle^S$, et celle d'absorption $\langle 0+|1\rangle^S$. L'indice S caractérise la source.

Nous commençons par étudier le processus d'émission-absorption d'une particule stable, neutre, de masse m et d'impulsion

$$p = (p^0, \vec{p}) ; \quad p^0 = [\vec{p}^2 + m^2]^{1/2} \quad (1)$$

Dans tout ce qui suit, nous utilisons le système d'unité où

$$\hbar = c = 1 \quad (2)$$

et la métrique

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = +1 \quad (3)$$

L'état de la particule émise $|1_p\rangle$ ou absorbée $\langle 1_p|$ s'exprime également en fonction d'une représentation continue où :

$$\langle 1_p| = (d\vec{p})^{1/2} \langle p|, \quad |1_p\rangle = |p\rangle (d\vec{p})^{1/2} \quad (4)$$

Soit $K_{e,a}(x)$ la fonction numérique caractérisant la région de l'espace-temps où se produit l'(é)mission ou l'(a)bsorption de la particule en question. Soit, également, $K(p)$ la fonction caractérisant la capacité de la source d'émettre ou d'absorber une particule possédant un certain moment p . Autrement dit :

$$\langle 1_p | 0^- \rangle \sim K_e(p) \quad ; \quad \langle 0^+ | 1_p \rangle \sim K_a(p) \quad (5)$$

Envisageons une translation rigide de l'espace-temps de la quantité X . Nous savons que l'état quantique $\langle p | \rightarrow \langle \bar{p} | = e^{iP \cdot X} \langle p |$. De même, la fonction numérique $K(x)$ étant supposée scalaire devient

$$K_{e,a}(x) = K_{e,a}(x+X) \quad (6)$$

Ainsi, tenant compte des relations (4) et (5), nous obtenons la relation de complémentarité recherchée :

$$K_{e,a}(p) = \int (dx) e^{i p \cdot x} K_{e,a}(x) \quad (7)$$

Il est possible de rendre plus explicite la relation entre les capacités d'émission et d'absorption de la source, en utilisant la propriété d'orthogonalité entre l'état du vide et l'état comportant une seule particule avant l'intervention de la source d'émission, à savoir :

$$0 = \langle 0^- | 1_p \rangle = \langle 0^- | 0^+ \rangle^K \langle 0^+ | 1_p \rangle^K + \sum_{p'} \langle 0^- | 1_{p'} \rangle^K \langle 1_{p'} | 1_p \rangle^K + \dots \quad (8)$$

Les termes comportant des états à plus d'une particule sont négligeables, dans l'hypothèse d'une source à faible capacité d'émission et d'absorption, c'est à dire, ne pouvant émettre ou absorber au plus qu'une seule particule. De plus, il est suffisant d'utiliser les valeurs de $\langle 0+|1_p \rangle^K$ et de $\langle 0-|1_p \rangle^K = \langle 1_p|0- \rangle^{K*}$ pour $K=0$:

$$K=0 : \quad \langle 0-|0+ \rangle = \langle 0+|0- \rangle^* = 1 \quad (9)$$

$$\langle 1_p|1_p \rangle = \delta_{pp}, \quad (10)$$

à des facteurs de phase près, qui servent à assurer, que dans la relation :

$$\langle 0+|1_p \rangle^K = - \langle 1_p|0- \rangle^{K*} \quad (11)$$

les deux états de particule se réfèrent à la même surface du genre espace. La connection entre les amplitudes de création et d'annihilation peut également s'écrire :

$$i \langle 0+|1_p \rangle^K = [i \langle 1_p|0- \rangle^K]^* \quad (12)$$

Alors, avec un choix arbitraire de phases, les fonctions numériques $K_{a,e}(x)$ sont des fonctions complexes conjuguées l'une de l'autre. Le cas le plus simple que nous considérons d'abord est celui de fonctions réelles,

$$K_e(x) = K_a(x) = K(x) \quad (13)$$

ce qui correspond, en fait, à la description de particules neutres.

Rendons plus explicite les relations exprimées par (5), et ce de la manière suivante :

$$\langle 1_p | 0 \rangle^K = 1K_p \quad ; \quad \langle 0+ | 1_p \rangle^K = 1K_p^* \quad (14)$$

$$\text{où} \quad K_p = (d\omega_p)^{1/2} K(p) \quad , \quad d\omega_p = \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \quad (15)$$

$$K(p) = \int (dx) e^{-ip \cdot x} K(x) \quad ; \quad K(p)^* = K(-p) \quad (16)$$

En pratique, l'expérimentateur dispose d'un faisceau de particules sur lequel il effectue ses mesures. Que représente un faible faisceau de particules sans spin, dans une situation causale? Nous débutons par l'état du vide; puis une faible source $K_2(x)$, occupant une région bien définie dans l'espace-temps, entre en action. Le plus souvent, elle ne produit rien, avec une amplitude qui lui est associée $\langle 0+ | 0 \rangle^{K_2} \sim 1$, et, occasionnellement, elle émet une particule, avec une amplitude $\langle 1_p | 0 \rangle^{K_2}$. Après que la source d'émission ait cessé d'agir, l'état du vide ou l'état à une particule produit, reste inchangé jusqu'à pénétrer la région de l'espace-temps, correspondant à une source d'absorption $K_1(x)$. Son action en détectant la particule est décrite par l'amplitude $\langle 0+ | 1_p \rangle^{K_1}$. Après que cette source ait cessé d'agir, nous retrouvons à nouveau l'état du vide. Le processus entier est représenté par :

$$\begin{aligned} \langle 0+ | 0 \rangle^{K_1+K_2} &= \langle 0+ | 0 \rangle^{K_1} \langle 0+ | 0 \rangle^{K_2} \\ &+ \sum_p \langle 0+ | 1_p \rangle^{K_1} \langle 1_p | 0 \rangle^{K_2} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

où l'indice + ou - représente la séquence causale relative à la source à laquelle il est référé, à savoir K_1 ou K_2 . De façon générale, l'amplitude du vide relative à une source K peut s'écrire

$$\langle 0+|0-\rangle^K = 1 + f(K) ; \quad f(0) = 0 \quad (18)$$

Tenant compte des relations 14, 15 et 16, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle 0+|0-\rangle^{K_1+K_2} \cong & 1 + f(K_1) + f(K_2) \\ & + i \int (dx)(dx') K_1(x) [i d\omega_p e^{ip(x-x')}] K_2(x') \end{aligned} \quad (19)$$

où le signe $\cong$ correspond à la limitation de source de faible capacité. Remarquons, d'autre part, que les fonctions $K_1(x)$ et $K_2(x)$ sont les composantes disjointes de la source globale $K(x)$ de sorte que :

$$K(x) = K_1(x) + K_2(x) \quad (20)$$

Ainsi, dans une description globale du processus, aucune distinction ne devrait être faite entre les deux composantes de la source, mis à part le fait qu'elles occupent deux régions parfaitement disjointes de l'espace-temps. Ceci représente, ce qui est appelé l'uniformité dans l'espace-temps. Dans ces conditions $\langle 0+|0-\rangle^K$ dépend uniquement de $K(x)$ et de la manière rendue explicite par la structure bilinéaire comportant K_1 et K_2 . Par suite

$$\langle 0+|0-\rangle^K \cong 1 + (1/2) \int (dx)(dx') K(x) \Delta_+(x-x') K(x') \quad (21)$$

La fonction $\Delta_+(x-x')$ peut être choisie symétrique, sans que cela altère la généralité du raisonnement. Ainsi :

$$\Delta_+(x-x') = \Delta_+(x-x') \quad (22)$$

En comparant les structures 19 et 21, nous obtenons la structure de $\Delta_+(x-x')$ pour un arrangement causal des sources d'émission et d'absorption, à savoir:

$$x^0 > x'^0 : \Delta_+(x-x') = \int d\omega_p e^{ip(x-x')} \quad (23)$$

Etant donné les propriétés de la fonction $\Delta_+(x-x')$, nous déduisons:

$$x^0 < x'^0 : \Delta_+(x-x') = \int d\omega_p e^{ip(x'-x)} \quad (24)$$

Rappelons que p est l'impulsion d'une particule telle que son énergie p^0 est positive et donnée par l'expression 1. La réalisation explicite de la fonction $\Delta_+(x-x')$ peut apparaître possible uniquement pour une séparation causale, ou encore, pour une séparation du genre temps entre les points x et x' . Mais, en fait, elle est valable partout. La seule difficulté peut provenir uniquement lorsque $(x-x')$ est du genre espace, où la causalité n'a plus son sens covariant. Alors, différentes valeurs de la fonction Δ_+ peuvent être obtenues suivant le choix du système de coordonnées. En fait, ce n'est pas le cas, puisque $d\omega_p$ et $e^{ip(x-x')}$ sont des structures invariantes. En choisissant un système de coordonnées tel que $x^0 = x'^0$, alors:

$$x^0 = x'^0 : \Delta_+(x-x') = \int d\omega_p e^{\pm i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \quad (25)$$

est indépendant de l'ambiguïté de signe, puisque l'intégrale dépend uniquement de $(\vec{x} - \vec{x}')^2 = (x - x')^2$. Par suite, il n'y a aucune

référence à l'arrangement causal des sources, dans l'expression 21, et par suite, la structure est applicable pour une disposition arbitraire des sources. C'est ce que l'on désigne par l'extrapolation ou la généralisation dans l'espace-temps.

Il est maintenant possible de calculer la probabilité de persistance de l'état du vide:

$$| \langle 0+ | 0- \rangle^K |^2 \cong 1 - \int (dx)(dx') K(x) \operatorname{Re}[(1/i)\Delta_+(x-x')] K(x') \quad (26)$$

où

$$\operatorname{Re}[(1/i)\Delta_+(x-x')] = \operatorname{Re} \int d\omega_p e^{ip(x-x')} \quad (27)$$

est valide partout, et la référence à la partie réelle n'est pas nécessaire puisqu'elle est implicite dans la structure symétrique de la forme quadratique. Une expression équivalente de la probabilité du vide est:

$$| \langle 0+ | 0- \rangle^K |^2 \cong 1 - \sum_p | \langle 1_p | 0- \rangle^K |^2 \quad (28)$$

L'équivalence entre les expressions 26 et 28 est immédiate du fait que:

$$\begin{aligned} \int (dx)(dx') K(x) [\int d\omega_p e^{ip(x-x')}] K(x') &= \int d\omega_p |K(p)|^2 \\ &= \sum_p | \langle 1_p | 0- \rangle^K |^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Il est à noter que $\Delta_+(x-x')$ peut avoir une expression légèrement modifiée, pour des intervalles $(x-x')$ du genre espace, mais cette expression doit garder ses caractéristiques physiques. Autrement dit, cela revient à ajouter à la fonction Δ_+ , des termes

qui seraient différents de zéro, seulement pour $(x-x')$ du genre espace. Cela ne contribuerait en aucune manière à l'échange causale entre les sources d'une part, ni au calcul de la probabilité du vide d'autre part. L'hypothèse d'uniformité dans l'espace-temps exclu^t, en effet, de telles contributions. Dans ce contexte, il est possible de donner à l'hypothèse d'uniformité une forme plutôt abstraite, en considérant l'espace euclidien à 4 dimensions rattaché à l'espace de Minkowski par la transformation suivante:

$$x_4 = i x^0 \quad (30)$$

La distinction entre vecteurs du genre espace et du genre temps disparaît complètement lorsqu'on passe de l'espace de Minkowski à l'espace Euclidien. Si l'on fait l'hypothèse que l'amplitude du vide, décrivant un processus physique complet, continue à garder son plein sens physique, après avoir effectué la transformation 30, alors toute distinction particulière entre arrangements des sources dans l'espace-temps disparaît. Il est d'usage d'appeler cette hypothèse "le postulat euclidien". Dans ces conditions :

$$(1/i)\Delta_+(x-x') \rightarrow \Delta_E(x-x') \quad (31)$$

et

$$\Delta_E(x-x') = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} e^{ip \cdot (x-x') - p^0 |x_4 - x'_4|} \quad (32)$$

En utilisant, l'identité suivante:

$$(1/2p^0) e^{-p^0 |x_4 - x'_4|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_4}{2\pi} \frac{e^{ip_4(x_4 - x'_4)}}{p_4^2 + (p^0)^2} \quad (33)$$

nous obtenons la forme euclidienne invariante:

$$\Delta_E(x-x') = \int \frac{(dp)_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_\mu(x-x')_\mu}}{(p_\mu)^2 + m^2} ; (dp)_E = dp_1 \dots dp_4 \quad (34)$$

où nous ne faisons aucune distinction entre vecteurs covariant et contravariant, pour marquer la structure de l'espace euclidien. Nous retrouvons la grandeur physique de l'amplitude du vide, en effectuant la transformation inverse:

$$x_4 \rightarrow ix^0, \quad p_4 \rightarrow -ip_0 \quad (35)$$

à condition qu'il soit entendu que l'on effectue une rotation complexe d'angle approchant $\pi/2$ par valeurs inférieures:

$$x_4 \rightarrow e^{i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} x^0, \quad p_4 \rightarrow e^{-i(\frac{\pi}{2} - \epsilon)} p_0, \quad \epsilon \rightarrow +0 \quad (36)$$

Nous retrouvons alors la forme

$$\Delta_+(x-x') = \int \frac{(dp)}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \Big|_{\epsilon \rightarrow +0}, \quad (dp) = dp_0 \dots dp_3 \quad (37)$$

où

$$\frac{1}{x - i\epsilon} \Big|_{\epsilon \rightarrow +0} = P \frac{1}{x} + i\pi \delta(x) \quad (38)$$

La généralisation de ce qui vient d'être fait au cas où la fonction numérique est complexe est immédiate. Il peut être démontré de façon explicite qu'une telle source est capable de produire des particules chargées de même masse m . Les sources

d'émission et d'absorption sont alors complexes conjuguées l'une de l'autre. Et par suite :

$$\langle 0+|0-\rangle^K = 1 + i \int (dx)(dx') K^*(x) \Delta_+(x-x') K(x') \quad (39)$$

Il est à remarquer que si l'on effectue une transformation de phase agissant sur la fonction $K(x)$,

$$K(x) \rightarrow e^{i\phi} K(x) \quad ; \quad K^*(x) \rightarrow e^{-i\phi} K^*(x) \quad (40)$$

l'expression 39 de l'amplitude du vide demeure invariante. Une autre façon de présenter les choses est de séparer parties réelle et imaginaire de la fonction $K(x)$

$$K(x) = 2^{-1/2} [K_{(1)}(x) - iK_{(2)}(x)] \quad , \quad K^*(x) = 2^{-1/2} [K_{(1)}(x) + iK_{(2)}(x)] \quad (41)$$

Dans de telles conditions, il est intéressant d'effectuer le changement de notation suivant: $K(x)$ représentant un objet à deux composantes, $K_{(1)}$ et $K_{(2)}$, de sorte que la transformation de phase 40 devient

$$K(x) \rightarrow e^{iq\phi} K(x) \quad \text{ou} \quad q = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (42)$$

La matrice q est identifiée comme étant la matrice de charge. Ses valeurs propres sont ± 1 , et les sources complexes K et K^* correspondent à ses vecteurs propres. Il est à noter que les sources réelles, $K_{(1)}$ et $K_{(2)}$, ne produisent ^{pas} d'états de particule de charge bien définie.

Le faisceau de particules, sur lequel l'expérimentateur effectue ses mesures, contient plusieurs particules à un certain temps donné, qui existent dans des conditions de non-interaction, puisqu'elles sont largement espacées comparées aux distances microscopique d'interaction. Un faisceau de particules chargées fait exception à cette règle, du moins en principe, mais en pratique, il est possible de diminuer les interactions de longue portée et les rendre négligeables, en agissant sur la densité du faisceau. Ainsi, la généralisation de l'étude précédente relative aux sources de faible capacité peut être faite et étendue aux sources de forte capacité. Nous donnons une transcription théorique d'une telle situation, en utilisant la directivité des sources, qui n'est autre qu'un aspect de la complémentarité entre $K(x)$ et $K(p)$. Une source, d'une certaine étendue et de phase convenable (pour utiliser le langage d'antennes), peut produire un faisceau de très grande directivité, limitant ainsi la location de la source de détection, dans le cas où un certain couplage peut avoir lieu. Nous représentons un nombre arbitraire de paires de faibles sources d'émission et d'absorption, de haute directivité, agissant côte à côte avec un couplage pratiquement négligeable, pour aboutir à la situation, où, dans une région intermédiaire entre l'émission et l'absorption, nous rencontrons un nombre arbitraire de particules sans interactions.

Considérons d'abord des sources réelles que nous appelons $K_\alpha(x)$, $\alpha=1,2,\dots$, correspondant à de faibles sources, groupées de sorte que chacune d'elles représente une paire de sources d'émission et d'absorption échangeant au maximum une particule. Ces événements

sont physiquement indépendents, et par suite l'amplitude globale du vide s'obtient en multipliant entre elles les amplitudes partielles correspondant à chaque source individuellement, à savoir:

$$\langle 0+|0-\rangle^K = \prod_{\alpha} [1 + (1/2) \int (dx)(dx') K_{\alpha}(x) \Delta_{+}(x-x') K_{\alpha}(x')] \quad (43)$$

avec:

$$K(x) = \sum_{\alpha} K_{\alpha}(x) \quad (44)$$

D'après le principe d'uniformité dans l'espace-temps, il n'y a aucune distinction particulière entre les différentes composantes de la source $K(x)$. Par conséquent, afin que l'amplitude du vide dépende uniquement de $K(x)$, il est évident qu'il faut utiliser la propriété suivante:

$$\alpha \neq \beta : \int (dx)(dx') K_{\alpha}(x) \Delta_{+}(x-x') K_{\beta}(x') = 0, \quad (45)$$

qui reflète l'absence de couplage entre les particules. Par suite, tenant compte du fait que les sources individuelles sont de faible capacité,

$$\begin{aligned} \langle 0+|0-\rangle^K &= \prod_{\alpha} \exp[(1/2) \int (dx)(dx') K_{\alpha}(x) \Delta_{+}(x-x') K_{\alpha}(x')] \\ &= \exp[\sum_{\alpha} (1/2) \int (dx)(dx') K_{\alpha}(x) \Delta_{+}(x-x') K_{\alpha}(x')] \\ &= \exp[\sum_{\alpha\beta} (1/2) \int (dx)(dx') K_{\alpha}(x) \Delta_{+}(x-x') K_{\beta}(x')] \end{aligned}$$

ou encore,

$$\langle 0+|0-\rangle^K = \exp[(1/2) \int (dx)(dx') K(x) \Delta_{+}(x-x') K(x')] \quad (46)$$

La même expression s'applique également pour le cas où $K(x)$ est à deux composantes réelles. Alors, la structure 46 suppose une sommation discrète sur les deux composantes réelles de la source. Autrement dit, dans le cas où la fonction numérique est à deux composantes, nous étudions le problème d'émission et d'absorption de particules chargées, et la structure de l'amplitude du vide est toujours celle donnée par l'expression 46. De plus, nous admettons que cette expression continue à être valable pour n'importe quel arrangement des sources d'émission et d'absorption, à condition, bien entendu, que les particules émises soient sans interaction.

3 - Particules de spin-1. Le photon.

La présentation générale des sources de particules possédant un spin de valeur arbitraire est discutée de façon complète par J. Schwinger, dans son livre intitulé: "Particles, Sources and Fields". Mais nous pensons qu'il est nécessaire de donner une brève présentation des sources de particules vectorielles, puisque c'est d'elles qu'il en sera question dans les chapitres suivants.

Nous avons établi dans la section 2 la structure exponentielle des particules scalaires. En fait, la structure obtenue est universelle. Il est évident que si les particules de spin-0 sont décrites par des sources scalaires, des sources se transformant comme des vecteurs ou tenseurs d'ordre de plus en plus élevé, doivent correspondre à des particules de spin 1,2,etc... Par conséquent, une source vectorielle, désignée par $K^\mu(x)$, est le candidat recherché pour la description des particules de spin 1. Une telle source comporte 4 composantes, alors que nous devrions avoir trois sources différentes associées aux trois valeurs possibles de spin que peut posséder une particule de masse non nulle. Cela signifie, par conséquent, que $K^\mu(x)$ est un mélange de sources de spin 1 et de spin 0, puisqu'il est possible de former une fonction scalaire en considérant $\partial_\mu K^\mu(x)$. Si nous remplaçons, dans l'expression 46, $K(x)$ par $K^\mu(x)$, alors,

$$\langle 0+|0-\rangle^K = \exp \left[(1/2) \int (dx)(dx') K^\mu(x) \Delta_+(x-x') K_\mu(x') \right] \quad (47)$$

et nous rencontrons de sérieuses difficultés en évaluant la

probabilité du vide:

$$|<0+|0->^K|^2 = \exp [-\int d\omega_p K^\mu(-p) K_\mu(p)] \quad (48)$$

En effet, cette probabilité n'est plus garantie d'être plus petite que l'unité, étant donné que;

$$K^\mu(-p) K_\mu(p) = K^\mu(p)^* K_\mu(p) = |\vec{K}(p)|^2 - |K^0(p)|^2 \quad (49)$$

peut tout aussi bien être positif que négatif. Cette difficulté peut être surmontée, en adoptant la structure invariante suivante:

$$\begin{aligned} <0+|0->^K = \exp \left[(i/2) \int (dx)(dx') \{ K^\mu(x) \Delta_+(x-x') K_\mu(x') \right. \\ \left. + (1/m^2) \partial_\mu K^\mu(x) \Delta_+(x-x') \partial_\nu K^\nu(x') \} \right] \quad (50) \end{aligned}$$

En évaluant, maintenant, la probabilité du vide, nous rencontrons l'expression suivante:

$$\begin{aligned} K^\mu(p)^* K_\mu(p) + (1/m^2) p_\mu K^\mu(p)^* p_\nu K^\nu(p) \\ = K^\mu(p)^* [g_{\mu\nu} + (1/m^2) p_\mu p_\nu] K^\nu(p) \quad (51) \end{aligned}$$

Il est à noter que l'expression 50 est valable uniquement pour les particules de masse $m \neq 0$. Le passage à la limite n'a de sens que si, alors, $\partial_\mu K^\mu(x)$ s'annule. On pourrait écrire, par suite:

$$\partial_\mu K^\mu(x) = m K(x) \quad (52)$$

en identifiant $K(x)$, dans le passage à la limite $m \rightarrow 0$, avec la source de particules de spin 0 et sans masse. Cette source serait alors complètement indépendante de la source de photons, puisque des particules de masse $m=0$ et de spin $s=0$ ne peuvent être obtenues expérimentalement. Ainsi, nous retenons, dans le passage à la limite, l'expression suivante pour l'amplitude du vide d'une source de photons:

$$\langle 0+|0-\rangle^J = \exp \left[(1/2) \int (dx)(dx') J^\mu(x) D_+(x-x') J_\mu(x') \right] \quad (53)$$

où $J^\mu(x)$ représente la source de photons, sujette à la restriction:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (54)$$

Nous utilisons le symbole D_+ pour indiquer le fait que $m=0$.

Ayant atteint ce point important de passage à la limite, il est intéressant de noter qu'il s'effectue de façon naturelle. La source associée à un certain type de particules est une abstraction du processus réel de création et d'annihilation. Elle retient uniquement ce que tous ces mécanismes ont en commun, en laissant de côté les caractéristiques de chaque mécanisme pris individuellement. Toute restriction imposée à la source par le type particulier de particules que nous envisageons, doit être commun à tous les mécanismes possibles, et ceci établit une loi physique universelle. Il ne fait aucun doute que l'équation 54 représente une loi physique bien connue, la loi de conservation de la charge électrique. Il en découle que la fonction $J^\mu(x)$ n'est pas déterminée de façon unique. Cette propriété se reflètera sur le champ électromagnétique.

4 - Le concept de champ

Les sources ont été introduites pour donner une description idéalisée du phénomène de création et d'annihilation de particules. Mais le but est d'étudier les propriétés des particules, qui se trouvent dans une région intermédiaire entre les événements de création et de détection. Par suite, nous avons besoin d'un élément adéquat de mesure de l'intensité d'excitation qui est produite dans une région, qui peut être loin des sources. Le moyen naturel d'obtenir une telle mesure est d'étudier l'effet d'une source test, introduite dans la région que nous désirons étudier. Pour cela, considérons une source $S(x)$ tout à fait quelconque. La structure générale de l'amplitude du vide est analogue à l'expression 46, valable pour une source scalaire:

$$\langle 0+ | 0- \rangle^S = e^{iW(S)} \quad (55)$$

où $W(S)$ est appelé l'ACTION, et possède la structure suivante:

$$W(S) = \frac{1}{2} \int (dx)(dx') S(x) \Delta(x-x') S(x') \quad (56)$$

La fonction $\Delta(x-x')$ représente la fonction de propagation appropriée à la source considérée. Examinons l'effet produit par une source faible $\delta S(x)$ sur l'action $W(S)$. La variation correspondante obtenue est donnée par:

$$\delta W(S) = \int (dx) \delta S(x) \phi(x) \quad (57)$$

où

$$\Phi(x) = \int (dx') \Delta(x-x') S(x') \quad (58)$$

représente le champ associé à la source $S(x)$. Compte tenu de cette présentation générale, nous allons déduire les propriétés dont nous aurons besoin pour les particules de spin 1. En particulier, dans le cas de particules vectorielles de masse $m \neq 0$, l'action $W(K)$ s'écrit:

$$W(K) = \frac{1}{2} \int (dx)(dx') [K^\mu(x) \Delta_+(x-x') K_\mu(x') + (1/m^2) \partial_\mu K^\mu(x) \Delta_+(x-x') \partial_\nu K^\nu(x')] \quad (59)$$

L'introduction d'une source test définit le champ vectoriel $\Phi^\mu(x)$ tel que:

$$\delta W(K) = \int (dx) K_\mu(x) \Phi^\mu(x) \quad (60)$$

de sorte que :

$$\Phi^\mu(x) = \int (dx') \Delta_+(x-x') K^\mu(x') - (1/m^2) \partial^\mu \int (dx') \Delta_+(x-x') \partial_\nu K^\nu(x') \quad (61)$$

Il est facile de vérifier, alors, que

$$\partial_\mu \Phi^\mu(x) = (1/m^2) \partial_\mu K^\mu(x) \quad (62)$$

et, par conséquent, la divergence du champ vectorielle s'annule dans les régions de l'espace-temps non occupées par la source.

En comparant, les expressions 61 et 62, nous aboutissons à l'équation de champ:

$$(-\partial^2 + m^2) \Phi^\mu(x) + \partial^\mu \partial_\nu \Phi^\nu(x) = K^\mu(x) \quad (63)$$

Introduisons le champ tensoriel antisymétrique

$$G_{\mu\nu}(x) = -G_{\nu\mu}(x) = \partial_{\mu}\phi_{\nu}(x) - \partial_{\nu}\phi_{\mu}(x) \quad (64)$$

et l'équation de champ devient

$$\partial_{\nu}G^{\mu\nu}(x) + m^2\phi^{\mu}(x) = K^{\mu}(x) \quad (65)$$

Nous avons des équation analogues pour le cas où $m=0$, c'est à dire dans le cas du photon. Mais pour bien montrer la différence entre les deux cas, nous désignerons le champ tensoriel antisymétrique par $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x) \quad (66)$$

où $A_{\mu}(x)$ désigne le champ électromagnétique associé à la source de photons $J_{\mu}(x)$. Nous obtenons, alors, l'équation inhomogène de champ :

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu}(x) = J^{\mu}(x) \quad (67)$$

Dans la section suivante de ce chapitre, nous allons donner une description sommaire des principes variationnels de l'action $W(S)$, en nous concentrant uniquement sur la partie qui nous sera utile par la suite. Mais, il sera intéressant de noter qu'il sera possible de retrouver les équations de champ directement à partir des principes variationnels.

5 - Principes variationnels de l'action W(S)

Faisons une transcription symbolique des équations obtenues dans la section 4, en particulier :

$$W = \frac{1}{2} \int S \Delta S \quad (68)$$

$$\delta W = \int \delta S \Phi, \quad \Phi = \Delta S \quad (69)$$

$$F \Phi = S \quad (70)$$

L'équation 70 représente l'équation de champ. La relation non-locale dans l'espace-temps entre le champ et la source, obtenue grâce à la fonction de propagation, se transforme donc en une équation différentielle à caractère local, symbolisé par l'opérateur F. A partir de là, il est possible d'obtenir d'autres expressions équivalentes de l'action :

$$W = \frac{1}{2} \int S \Phi = \frac{1}{2} \int \Phi S \quad (71)$$

$$= \frac{1}{2} \int \Phi F \Phi = \frac{1}{2} \int F \Phi \Phi \quad (72)$$

$$= \int -[S \Phi - \frac{1}{2} \Phi F \Phi] \quad (73)$$

L'expression 73 est particulièrement importante. Jusqu'à présent le champ Φ était une grandeur dérivée, maintenant, il acquiert un sens totalement différent. Considérons, les grandeurs Φ et S comme indépendantes, et étudions la variation de l'action W

$$\delta W = \int [\delta S \phi] + \int [\delta \phi S - \delta \phi F \phi] \quad (74)$$

Mais W est en effet donné par la relation 69, de sorte que le second terme de 74 doit nécessairement être nul. Il s'annule, puisque $F\phi = S$. Par conséquent, cela veut dire que l'expression 73, considérée comme fonctionnelle de la grandeur ϕ pour S fixe, est stationnaire. Voilà pourquoi la quantité W est appelée ACTION, puisqu'il est possible d'obtenir l'équation de champ, en lui appliquant la propriété de stationnarité. Nous identifierons plus loin le second terme de 73, qui est une fonction quadratique du champ, comme étant le lagrangien du système considéré. Ainsi l'action W peut s'écrire en termes de couplage source-champ, et champ-champ, de sorte que le couplage champ-champ représente le lagrangien. Nous écrirons W sous la forme:

$$W = \int (dx) [S(x)\phi(x) + L(\phi(x))] \quad (75)$$

Nous appliquerons ces remarques générales au cas particulier du spin 1. En utilisant l'équation de champ 63, le lagrangien d'un système de particules libres de spin 1 s'écrit:

$$L = - \frac{1}{4} [\partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu][\partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu] - \frac{1}{2} m^2 \phi^\mu \phi_\mu \quad (76)$$

Il est à noter, toutefois, que le lagrangien n'est pas déterminé de façon unique. Deux fonctions de lagrange se rapportant à un même système satisfassent une relation du type;

$$L_1 = L_2 + \partial^\mu f_\mu \quad (77)$$

Il est une autre façon de considérer les choses , celle de réécrire le lagrangien, comme fonction de deux champs totalement indépendents, le champ vectoriel Φ_μ et le champ tensoriel $G_{\mu\nu}$, alors:

$$L(\Phi_\mu, G_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} G^{\mu\nu}(\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu) + \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - (m^2/2) \Phi^\mu \Phi_\mu \quad (78)$$

En appliquant la propriété de stationnarité à l'action séparément par rapport aux champs vectoriel et tensoriel, nous obtenons respectivement :

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} + m^2 \Phi^\mu = K^\mu \quad (79)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu \quad (80)$$

Nous obtenons de la même manière les équations de champ pour une source de photons, en remplaçant $G_{\mu\nu}$ et Φ_μ par $F_{\mu\nu}$ et A_μ , et en posant $m=0$.

D'autres grandeurs peuvent être dérivées de l'action, comme le tenseur d'énergie-impulsion, le courant pour les particules chargées, etc... Nous nous concentrerons uniquement à l'évaluation du courant pour une source vectorielle complexe, émettant des particules chargées de masse m et de charge e . Il est sous-entendu que les composantes de la source et du champ comportent un indice supplémentaire pour tenir compte de la charge. Dans ces conditions, le courant s'obtient en étudiant la varia-

tion du lagrangien sous l'action d'une rotation dans l'espace des charges agissant sur le champ vectoriel, cette action est du type signalé dans la formule 42, en rapport avec une source scalaire. Considerons donc une rotation infinitésimale d'angle $\delta\alpha(x)$ dans l'espace des charges, dépendant de façon explicite du point considéré dans l'espace-temps. Alors :

$$\Phi_\mu(x) \rightarrow \Phi_\mu(x) + \delta\Phi_\mu(x)$$

$$\delta\Phi_\mu(x) = ieq\delta\alpha(x)\Phi_\mu(x) \quad (81)$$

La variation correspondante du lagrangien, tel que donné par l'expression 78, s'écrit

$$L = -G^{\mu\nu}ieq\Phi_\nu\partial_\mu[\delta\alpha(x)] = -j^\mu(x)\partial_\mu[\delta\alpha(x)] \quad (82)$$

de sorte que, l'on obtient le courant $j^\mu(x)$ par identification.

$$j^\mu(x) = G^{\mu\nu}ieq\Phi_\nu(x) \quad (83)$$

La divergence de ce courant s'obtient en observant la variation correspondante de l'action

$$\delta W = -\int(dx)j^\mu(x)\partial_\mu[\delta\alpha(x)] = \int(dx)\partial_\mu j^\mu(x)\delta\alpha(x) \quad (84)$$

En déterminant de façon explicite la variation δW , et en identifiant l'expression ainsi obtenue avec l'expression équivalente 84,

nous obtenons :

$$\partial_{\mu} j^{\mu}(x) = \phi^{\mu}(x) \text{ eq } K_{\mu}(x) \quad (85)$$

Nous constatons que le courant $j^{\mu}(x)$ est conservé uniquement dans les régions de l'espace-temps non occupées par la source. La raison profonde de ce fait est que la description physique commence avec la création de la particule chargée, et nous négligeons de ce fait l'existence a priori de la charge à l'intérieur de la source. En somme, le courant global doit être nécessairement une grandeur conservée. Par conséquent, nous devons inclure dans notre description le fait que la charge a été transmise et non créée. Il est possible de construire de manière formelle un courant à divergence nulle de la façon suivante:

$$j_{\text{cons}}^{\mu}(x) = j^{\mu}(x) - \int (dx') f^{\mu}(x-x') \partial'_{\nu} j^{\nu}(x') \quad (86)$$

où f^{μ} doit satisfaire la condition

$$\partial_{\mu} f^{\mu}(x-x') = \delta(x-x') \quad (87)$$

De plus, si x est un point situé à l'extérieur de la région occupée par la source, le terme additionnel de 86 devrait s'annuler. Or, comme $\partial'_{\nu} j^{\nu}(x') \neq 0$ pour tout point x' situé à l'intérieur de la source, et comme le point x est relié au point x' de façon causale, alors

$$f^{\mu}(x-x') = 0 \quad \text{si } (x-x') \text{ est du genre temps} \quad (88)$$

Il est souvent utile de se limiter aux fonctions f impairs, c'est à dire :

$$f^{\mu}(x-x') = - f^{\mu}(x'-x) \quad (89)$$

Cette fonction représente le modèle électromagnétique de la source, elle a rapport à sa structure interne. Il existe donc un arbitraire dans le choix explicite de cette fonction, sujette toutefois, aux conditions 87, 88 et 89.

III - Présentation générale des fonctions de propagation des particules vectorielles

1 - Fonction de propagation libre

Reprenons notre étude de la section (II-3), où l'expression 50 de l'amplitude du vide est valable quelque soit l'arrangement des sources d'émission et d'absorption. Dans ces conditions, l'action du système considéré $W(K)$, tel que donné par (II-3,59), peut s'écrire comme une integrale évaluée dans l'espace des impulsions, en utilisant l'expression (II-2,37) de la fonction $\Delta_+(x-x')$, valable quelque soit $(x-x')$:

$$W(K) = \int \frac{(dp)}{(2\pi)^4} [\phi^\mu(-p)K_\mu(p) - \frac{1}{4} G^{\mu\nu}(-p)G_{\mu\nu}(p) - \frac{1}{2}m^2\phi^\mu(-p)\phi_\mu(p)] \quad (1)$$

$$\text{avec:} \quad G_{\mu\nu}(p) = ip_\mu\phi_\nu(p) - ip_\nu\phi_\mu(p) \quad (2)$$

et le principe variationnel de l'action donne l'équation de champ dans l'espace des impulsion

$$ip_\nu G^{\mu\nu}(p) + m^2\phi^\mu(p) = K^\mu(p) \quad (3)$$

et la fonction de propagation libre, exprimée dans l'espace des impulsions, est définie par $\Delta_{\mu\nu}(p)$, obtenue à partir de l'équation de champ:

$$\phi_\mu(p) = \Delta_{\mu\nu}(p) K^\nu(p) \quad (4)$$

Séparons source et champ, en parties transversale et longitudinale au mouvement des particules émises,

$$K^\mu = [g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}] K_\nu + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} K_\nu = K_T^\mu + K_L^\mu \quad (5)$$

Avec une expression analogue pour le champ Φ_μ , appliquons les opérateurs de projection transversal et longitudinal à l'équation (3) et nous obtenons les équations de champ transversal et longitudinal:

$$m^2 \Phi_L^\mu = K_L^\mu, \quad (p^2 + m^2) \Phi_T^\mu = K_T^\mu \quad (6)$$

de sorte que les fonctions de propagation, longitudinale et transversale, ne sont autres que:

$$\Delta_T(p^2) = \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad \Delta_L(p^2) = \frac{1}{m^2} \quad (7)$$

et la fonction de propagation libre totale s'obtient facilement:

$$\Delta^{\mu\nu}(p) = [g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}] \Delta_T + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \Delta_L = \frac{g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}}{p^2 + m^2} \quad (8)$$

Cette méthode de détermination de la fonction de propagation est tout à fait générale, et nous l'appliquerons dans le cas où l'équation de champ devient compliquée. C'est la raison pour laquelle nous l'avons appliquée dans toute sa généralité. Nous aurions pu, en effet, aboutir à l'équation (8) en inversant l'équation de champ (3), ce qui est facile à faire dans ce cas là.

2 - Fonction de propagation modifiée

Considérons , maintenant, le cas plus général, où la source vectorielle agit de sorte à créer une énergie et un moment qui ne satisfont pas la relation habituelle $p^2 = -m^2$, correspondant à l'émission d'une particule physique "libre". Une telle excitation (particule "virtuelle") ne peut se propager et reste localisée dans le voisinage de la source, jusqu'à céder son énergie et son moment à un ensemble d'autres particules qui peuvent se propager. Ainsi, la particule "virtuelle" possède une impulsion telle que $-P^2 = M^2 = m^2$. Le courant entrant en jeu dans l'interaction, ainsi envisagée, n'est pas conservé. Alors , l'action totale du système comporte un terme correspondant à la propagation libre, et un terme additionnel provenant de l'interaction envisagée. Dans ces conditions, le terme additionnel apparaissant dans l'expression de l'amplitude du vide est de la forme:

$$\begin{aligned} \text{V.A.} = & \int dM^2 a(M^2) d\omega_P (1/4) G^{\mu\nu}(-P) G_{\mu\nu}(P) \\ & - \int dM^2 b(M^2) d\omega_P (1/2) P_\mu \phi^\mu(-P) P_\nu \phi^\nu(P) \end{aligned} \quad (9)$$

où le premier terme correspond à la partie conservée du courant, et le second terme à sa partie non conservée.

Maintenant, nous allons appliquer un des principes de base de la théorie des sources, celui de l'extrapolation dans l'espace-temps appliquée à l'expression (9). La prescription à suivre est tout à fait identique à celle présentée dans le chapitre II, pour les sources scalaires. En particulier, le passage

de l'expression (II-2,24) à (II-2,37) revient à remplacer $(i d\omega_p)$ par

$$\frac{(dp)}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} + \text{termes de contact} \quad (10)$$

Les termes de contact ou termes additionnels, tel que mentionné au chapitre II, sont, dans l'espace-temps, des fonctions $\delta(x-x')$ ou des dérivées de $\delta(x-x')$, et par suite, dans la représentation d'impulsion, un polynôme où la variable est l'impulsion. Ces termes sont à choisir de façon à garder les caractéristiques physiques de la fonction de propagation. Ainsi, le terme additionnel (9) de l'amplitude du vide s'écrit, pour un arrangement quelconque des sources d'émission et d'absorption, de la façon suivante:

$$\begin{aligned} V.A. = i \int \frac{(dp)}{(2\pi)^4} dM^2 [a(M^2)(-1/4)G^{\mu\nu}(-p)G_{\mu\nu}(p) \{ \frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} + c.t. \} \\ + b(M^2)(1/2)p_\mu \phi^\mu(-p)p_\nu \phi^\nu(p) \{ \frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} + c.t. \}] \quad (11) \end{aligned}$$

$$= i W_{add}. \quad (12)$$

Additionnons l'expression de W_{add} et celle de l'action initiale (1) et appliquons le principe variationnel à l'action globale ainsi obtenue. Ceci nous permet de déduire l'équation de champ:

$$\begin{aligned} [1 + \int dM^2 a(M^2) (\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} + c.t.)] i p_\nu G^{\mu\nu}(p) \\ + m^2 \phi^\mu(p) - [\int dM^2 b(M^2) (\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} + c.t.)] p^\mu p^\nu \phi_\nu(p) = K^\mu(p) \quad (13) \end{aligned}$$

Appliquons la méthode générale esquissée dans la section (III-1) pour trouver la fonction de propagation et ses composantes transversale et longitudinale. En appliquant l'opérateur de projection transversal à l'équation de champ modifiée (13), nous déduisons la composante transversale modifiée de la fonction de propagation, à savoir:

$$\bar{\Delta}_T = \frac{1}{p^2 + m^2 + p^2 \int dM^2 a(M^2) \left[\frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon} + \text{c.t.} \right]} \quad (14)$$

De même en appliquant l'opérateur de projection longitudinal, nous déduisons l'expression de la composante longitudinal modifiée de la fonction de propagation:

$$\bar{\Delta}_L = \frac{1}{m^2 - p^2 \int dM^2 b(M^2) \left[\frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon} + \text{c.t.} \right]} \quad (15)$$

Les termes de contact s'obtiennent, en imposant aux fonctions (14) et (15) les conditions physiques suivantes:

- (a) $\bar{\Delta}_T$ doit avoir un pôle simple situé à $p^2 = -m^2$ et le résidu correspondant doit être égal à 1.
- (b) $\bar{\Delta}_L$ est égal à $1/m^2$ lorsque $p^2 = -m^2$

Ces deux conditions reviennent à exprimer le fait qu'à $p^2 = -m^2$, la source émet une particule libre et par conséquent la fonction de propagation doit s'identifier avec celle d'une particule libre, tel que nous l'avons exprimé par les relations (7). Ceci est réalisé de la manière suivante:

$$\text{pour } \bar{\Delta}_T : \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon} - \frac{1}{M^2 - m^2} + \frac{p^2 + m^2}{(M^2 - m^2)^2} = \left[\frac{p^2 + m^2}{M^2 - m^2} \right]^2 \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon}$$

$$\text{pour } \bar{\Delta}_L : \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon} - \frac{1}{M^2 - m^2} = - \frac{p^2 + m^2}{M^2 - m^2} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon}$$

de sorte que l'expression finale des composantes transversale et longitudinale de la fonction de propagation modifiée sont

$$\bar{\Delta}_T = \frac{1}{p^2 + m^2 + p^2 (p^2 + m^2)^2 \int_{m_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{a(M^2)}{(M^2 - m^2)^2} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon}} \quad (16)$$

$$\bar{\Delta}_L = \frac{1}{m^2 + p^2 (p^2 + m^2) \int_{m_0^2}^{\infty} dM^2 \frac{a(M^2)}{(M^2 - m^2)} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon}} \quad (17)$$

L'expression de la fonction de propagation modifiée s'obtient facilement à partir de (16) et (17), en remarquant que:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{\mu\nu} &= [g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2] \bar{\Delta}_T + (p_\mu p_\nu / p^2) \bar{\Delta}_L \\ &= g_{\mu\nu} \bar{\Delta}_T + (p_\mu p_\nu / p^2) \bar{\Delta}_T \bar{\Delta}_L [\bar{\Delta}_T^{-1} - \bar{\Delta}_L^{-1}] \end{aligned}$$

et nous en déduisons que

$$\bar{\Delta}_{\mu\nu} = \bar{\Delta}_T [g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu \frac{1 + (p^2 + m^2)^2 \int dM^2 \frac{a(M^2)}{(M^2 - m^2)^2} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon} - \int dM^2 \frac{b(M^2)}{(M^2 - m^2)} \frac{p^2 + m^2}{p^2 + M^2 - i\epsilon}}{m^2 - p^2 (p^2 + m^2) \int dM^2 \frac{b(M^2)}{(M^2 - m^2)} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon}}] \quad (18)$$

Deux remarques importantes s'imposent concernant les fonctions $a(M^2)$ et $b(M^2)$ d'une part, et le cas où l'on considère l'instabilité

des particules vectorielles. Commençons d'abord par étudier les restrictions imposées aux fonctions a et b, en tenant compte du fait que la probabilité est une quantité non négative:

$$\langle 0+ | 0- \rangle^K = \exp f(1/2) [K_T^\mu \bar{\Delta}_T K_{T\mu} + K_L^\mu \bar{\Delta}_L K_{L\mu}]$$

$$|\langle 0+ | 0- \rangle^K|^2 = \exp -f [K_T^\mu \text{Im} \bar{\Delta}_T K_{T\mu} + K_L^\mu \text{Im} \bar{\Delta}_L K_{L\mu}] \quad (19)$$

Nous deduisons comme condition première que $\text{Im} \bar{\Delta}_T > 0$, ou encore, $[\text{Im} \bar{\Delta}_T^{-1}] < 0$. Par suite:

$$a(M^2) \geq 0 \quad (20)$$

Quant au second terme relatif à la composante longitudinale, il faut se rappeler que $K_L^\mu = p^\mu p^\nu K_{\nu} / p^2$, de sorte que la probabilité du vide, donnée par (19) comporte un terme de la forme :

$$p_\mu K^\mu [(1/p^2) \text{Im} \bar{\Delta}_L] p_\nu K^\nu$$

et alors, c'est $(1/p^2) \text{Im} \bar{\Delta}_L$ qui doit être positif pour les valeurs de p^2 du genre temps, à savoir $p^2 < 0$, et finalement nous aboutissons à la condition :

$$[\text{Im} \bar{\Delta}_L^{-1}] > 0 \quad \rightarrow \quad b(M^2) > 0 \quad (21)$$

Nous allons exposer, maintenant, très brièvement, la façon dont on traite les particules instables, dans le cadre de la théorie des sources. Comme nous le faisons remarquer dans le chapitre II, le caractère de stabilité ou d'instabilité d'une

particule est une question de temps. Ainsi notre description précédente continue à être valable à condition d'exclure de la région d'intégration le point $M^2=m^2$, et ce, de façon symétrique. Ainsi, dans les intégrales spectrales, apparaissant dans les expressions (16) et (17), il suffit de remplacer

$$\frac{1}{(M^2-m^2)^2} \rightarrow \frac{d}{dm^2} P \frac{1}{M^2-m^2} \quad (22)$$

$$\frac{1}{M^2-m^2} \rightarrow P \frac{1}{M^2-m^2} \quad (23)$$

La largeur nominale de résonance est définie par:

$$\left[-\text{Im} \bar{\Delta}_T(p^2)^{-1} \right]_{-p^2=M^2} = \pi M^2 a(M^2) \equiv m \Gamma(M^2) \quad (24)$$

La largeur de résonance tel que mesurée physiquement est la valeur de la largeur nominale évaluée à $M^2=m^2$. Alors:

$$\Gamma \equiv \Gamma(m^2) = \pi m a(m^2) \quad (25)$$

Nous verrons que, dans le cas qui nous intéresse, où la particule vectorielle est traitée comme particule stable, l'application de la formule (25) donnera une largeur de résonance nulle, qui est exactement la valeur à laquelle nous devons nous attendre.

IV - La plus simple modification de la fonction de propagation de la particule de spin 1

Nous envisageons le cas d'une source de particules de spin 1 chargées possédant suffisamment d'énergie pour produire une particule virtuelle, qui par conséquent ne se propage pas. A peine arrivée à l'existence, cette particule produit une particule physique de spin 1 et un photon. L'énergie disponible à l'intérieure de la source est alors :

$$-p^2 = M^2 \geq m^2$$

où m est la masse de la particule de spin 1.

La description équivalente d'un tel processus est donnée par celui d'une simple source de particules de spin 1, produisant exactement les propriétés de la particule physique considérée plus haut. Une autre source complètement découplée de la précédente, produit un photon possédant les mêmes caractéristiques que plus haut. Si K et J sont respectivement les sources ~~dé~~-couplées produisant la particule et le photon, la probabilité du vide est alors:

$$\langle 0_+ | 0_- \rangle^{KJ} = \langle 0_+ | 0_- \rangle^K \langle 0_+ | 0_- \rangle^J \quad (1)$$

Le terme de l'expression ci-dessus responsable de la création d'une particule et d'un seul photon est:

$$V.A. = i \int (dx) \phi_1^\mu(x) K_{2\mu}(x) i \int (d\xi) A_1^\nu(\xi) J_{2\nu}(\xi) \quad (2)$$

Reprenons la description initiale du processus de création de la particule chargée de spin 1 et du photon. Le couplage envisagé est du type champ-courant. Par conséquent, une expression équivalente de l'amplitude du vide est donnée par ;

$$V.A. = i \int (d\xi) A_1^\mu(\xi) j_{\mu\text{cons}}(\xi) \quad (3)$$

où j_{cons}^μ représente le courant conservé de la particule chargée, construit de façon formelle de la manière suivante :

$$j_{\text{cons}}^\mu(x) = j^\mu(x) - \int (dx') f^\mu(x-x'') \partial_\nu j^\nu(x') \quad (4)$$

$j^\mu(x)$ est le courant effectif que transporte la particule et la fonction vectorielle $f^\mu(x-x')$ n'est autre que le modèle électromagnétique de la source, devant nécessairement satisfaire les conditions suivantes :

$$\partial_\mu f^\mu(x-x') = \delta(x-x') \quad (5)$$

$$f^\mu(x-x') = -f^\mu(x'-x) \quad (6)$$

$$f^\mu(x-x') = 0, \text{ si } (x-x')^2 < 0 \quad (7)$$

Le lagrangien d'un système de particules vectorielles est donné par l'expression suivante :

$$L(\Phi_\mu, G_{\mu\nu}) = -(1/2)G^{\mu\nu}(\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu) + (1/4)G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - (1/2)m^2 \Phi_\mu \Phi^\mu \quad (8)$$

Le courant $j^\mu(x)$ s'obtient en considérant la variation du lagrangien L sous une rotation infinitésimale dans l'espace des charges, agissant sur le champ ϕ_μ , à savoir :

$$\delta\phi_\mu = ieq\delta\alpha(x)\phi_\mu(x) \quad \rightarrow \quad \delta L = -j^\mu(x)\partial_\mu[\delta\alpha(x)] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta L &= -(1/2)G^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu) - m^2\phi_\mu\phi^\mu \\ &= -(1/2)G^{\mu\nu}ieq\delta\alpha(x)G_{\mu\nu} - (1/2)G^{\mu\nu}ieq(\phi_\nu\partial_\mu - \phi_\mu\partial_\nu)\delta\alpha(x) \\ &\quad - m^2\phi^\mu ieq\phi_\mu\delta\alpha(x) \end{aligned} \quad (10)$$

Etant donné que l'opérateur de charge q est un opérateur antisymétrique, alors :

$$G^{\mu\nu}qG_{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad \phi_\mu q\phi^\mu = 0$$

Utilisant également l'antisymétrie du champ tensoriel $G^{\mu\nu}$, nous obtenons finalement :

$$\delta L = -G^{\mu\nu}ieq\phi_\nu\partial_\mu[\delta\alpha(x)]$$

et par suite

$$j^\mu(x) = G^{\mu\nu}ieq\phi_\nu(x) \quad (11)$$

La variation correspondante de l'action W sous l'action d'une rotation infinitésimale dans l'espace des charges est alors :

$$\delta W = - \int(dx)j^\mu(x)\partial_\mu\delta\alpha(x) = \int(dx)\partial_\mu j^\mu(x)\delta\alpha(x)$$

ou encore : $\delta W = \int (dx) \Phi^\mu(x) ieq K_\mu(x) \delta(\alpha(x))$

et nous obtenons la loi de non-conservation du courant :

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \Phi^\mu(x) ieq K_\mu(x) \quad (12)$$

Remplaçons 11 et 12 dans l'expression 4 et nous obtenons l'expression du courant conservé :

$$j_{\text{cons}}^\mu(\xi) = G^{\mu\nu}(\xi) ieq \Phi_\nu(\xi) - \int (dx) f^\mu(\xi-x) \Phi^\nu(x) ieq K_\nu(x) \quad (13)$$

La seule partie effective du courant conservé correspondant au couplage envisagé est

$$j_{12}^\mu(\xi) = G_1^{\mu\nu}(\xi) ieq \Phi_{2\nu}(\xi) + G_2^{\mu\nu}(\xi) ieq \Phi_{1\nu}(\xi) - \int (dx) f^\mu(\xi-x) \times \Phi_1^\nu(x) ieq K_{2\nu}(x)$$

$$\text{ou } G^{\mu\nu}(\xi) = \partial_\xi^\mu \Phi^\nu(\xi) - \partial_\xi^\nu \Phi^\mu(\xi) = \int (dx) [\partial_\xi^\mu \delta(x-\xi) \Phi^\nu(x) - \partial_\xi^\nu \delta(x-\xi) \Phi^\mu(x)]$$

et par suite :

$$j_{12}^\mu(\xi) = \int (dx) \Phi_{1\alpha}(x) ieq \{ [g^{\nu\alpha} \partial_\xi^\mu \delta(x-\xi) - g^{\mu\alpha} \partial_\xi^\nu \delta(x-\xi)] \Phi_{2\nu}(\xi) - \delta(x-\xi) G_2^{\mu\alpha}(\xi) - f^\mu(\xi-x) K_2^\alpha(x) \} \quad (14)$$

Utilisons l'expression ci-dessus pour trouver l'expression explicite de 3 :

$$V.A. = i \int (dx) (d\xi) A_{1\mu}(\xi) \Phi_{1\alpha}(x) ieq \{ [g^{\nu\alpha} \partial_\xi^\mu \delta(x-\xi) - g^{\mu\alpha} \partial_\xi^\nu \delta(x-\xi)] \Phi_{2\nu}(\xi) - \delta(x-\xi) G_2^{\mu\alpha}(\xi) - f^\mu(\xi-x) K_2^\alpha(x) \} \quad (15)$$

Etant donné l'équivalence entre les équations 2 et 15, nous obtenons l'expression de la source effective pour l'émission d'une particule chargée de spin 1, et d'un photon :

$$iJ_2(\xi)K_2(x)|_{\text{eff}} = \text{eq}\{[g^{\nu\alpha}\partial_\xi^\mu\delta(x-\xi) - g^{\mu\alpha}\partial_\xi^\nu\delta(x-\xi)]\phi_{2\nu}(\xi) - \delta(x-\xi)G_2^{\mu\alpha}(\xi) - f^\mu(\xi-x)K_2^\alpha(x)\}$$

Dans l'espace des impulsions, l'expression de la source effective pour l'émission d'une particule de charge bien définie et d'impulsion p d'une part, et d'un photon possédant une certaine polarisation et une impulsion k d'autre part, s'obtient en prenant la transformée de Fourier de l'équation ci-dessus : ($P=p+k$)

$$iJ_2^\mu(k)K_2^\alpha(p)|_{\text{eff}} = \text{eq}\{[g^{\nu\alpha}p^\mu - g^{\mu\alpha}p^\nu + P^\mu g^{\nu\alpha} - P^\alpha g^{\mu\nu}]\phi_{2\nu}(P) - if^\mu(k)K_2^\alpha(P)\} \quad (16)$$

Utilisons, maintenant, l'équation des champs dans l'espace des impulsions :

$$\phi^\mu(P) = \frac{g^{\mu\nu} + P^\mu P^\nu / m^2}{P^2 + m^2} K_\nu(P) \quad (17)$$

A cause du nombre d'indices, et afin d'avoir une notation plutôt symétrique entre émission et absorption, il est utile d'effectuer le changement suivant $\mu, \alpha, \nu \rightarrow \nu, \beta, \kappa$ dans l'expression 16, de sorte que :

$$\phi_{2\kappa}(P) = \frac{g^{\kappa\beta} + P^\kappa P^\beta / m^2}{P^2 + m^2} K_{2\beta}(P)$$

$$\begin{aligned}
iJ_2^U(k)K_2^\beta(p)|_{eff} = & eq\{[g^{\kappa\beta}(p+P)^U - g^{U\beta}p^\kappa - g^{U\kappa}P^\beta] \frac{g_{\kappa\beta'} + P_\kappa P_{\beta'}/m^2}{P^2+m^2} \\
& - if^U(k)\delta_{\beta'}^\beta\} K_2^{\beta'}(P) \\
iJ_1^\mu(-k)K_1^\alpha(-p)|_{eff} = & K_1^{\alpha'}(-P)\{[g^{\sigma\alpha}(p+P)^\mu - g^{\mu\alpha}p^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\alpha] \frac{g_{\sigma\alpha'} + P_\sigma P_{\alpha'}/m^2}{P^2+m^2} \\
& - if^\mu(-k)\delta_{\alpha'}^\alpha\} eq \quad (18)
\end{aligned}$$

Les deux expressions ci-dessus se simplifient et donnent

$$\begin{aligned}
iJ_2^U(k)K_2^\beta(p)|_{eff} = & eq\{[(p+P)^U \delta_{\beta'}^\beta + p^U \frac{P_\beta P_{\beta'}}{m^2} - g^{U\beta}(p_{\beta'} + \frac{p \cdot P}{m^2} P_{\beta'}) \\
& - P^\beta \delta_{\alpha'}^\mu\} \frac{1}{P^2+m^2} - if^U(k)\delta_{\beta'}^\beta\} K_2^{\beta'}(P) \quad (19a) \\
iJ_1^\mu(-k)K_1^\alpha(-p)|_{eff} = & K_1^{\alpha'}(-P)\{[(p+P)^\mu \delta_{\alpha'}^\alpha + p^\mu \frac{P_\alpha P_{\alpha'}}{m^2} - g^{\mu\alpha}(p_{\alpha'} + \frac{p \cdot P}{m^2} P_{\alpha'}) \\
& - P^\alpha \delta_{\alpha'}^\mu\} \frac{1}{P^2+m^2} - if^\mu(k)\delta_{\alpha'}^\alpha\} eq \quad (19b)
\end{aligned}$$

L'expression 2 de l'amplitude du vide peut également s'écrire

$$V.A. = - \int d\omega_p d\omega_k [iK_1^\alpha(-p)J_1^\mu(-k)]_{eff} (g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2}) g_{\mu\nu} [iJ_2^U(k)K_2^\beta(p)]_{eff} \quad (20)$$

Insérons dans l'expression ci-dessus la décomposition suivante de l'unité, qui n'est autre que l'expression de conservation de l'impulsion :

$$1 = (2\pi)^3 \int d\omega_p dM^2 \delta(p+k-P) \quad (21)$$

Nous obtenons :

$$V.A. = -e^2 \int d\omega_p dM^2 K_1^{\alpha'}(-P) I_{\alpha'\beta'} K_2^{\beta'}(P) \quad (22a)$$

où

$$I_{\alpha'\beta'} = \int d\omega_p d\omega_k (2\pi)^3 \delta(p+k-P) \times \left[(p+P)^\mu \delta_{\alpha'}^\mu + p^\mu \frac{P_\alpha P_{\alpha'}}{m^2} - g^{\mu\alpha} \left(p_{\alpha'} + \frac{p \cdot P}{m^2} P_{\alpha'} \right) - p_{\alpha'}^\mu \right] \frac{1}{P^2 + m^2} - i f^\mu(k) \delta_{\alpha'}^\mu \times \left(g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2} \right) g_{\mu\nu} \quad (22b)$$

$$\times \left[(P+p)^\nu \delta_{\beta'}^\nu + p^\nu \frac{P_\beta P_{\beta'}}{m^2} - g^{\nu\beta} \left(p_{\beta'} + \frac{p \cdot P}{m^2} P_{\beta'} \right) - p_{\beta'}^\nu \right] \frac{1}{P^2 + m^2} - i f^\nu(k) \delta_{\beta'}^\nu$$

Le tenseur de second ordre $I_{\alpha'\beta'}$, est symétrique par rapport aux indices α' et β' . Afin de trouver l'expression explicite de ce tenseur, nous allons l'écrire de la façon suivante :

$$I_{\alpha'\beta'} = \int d\omega_p d\omega_k (2\pi)^3 \delta(p+k-P) J_{\alpha'\beta'} \quad (23)$$

où maintenant $J_{\alpha'\beta'}$, est un tenseur symétrique, fonction des variables p et k . Il est, par conséquent, de la forme :

$$J_{\alpha'\beta'} = a g_{\alpha'\beta'} + b P_{\alpha'} P_{\beta'} + c p_{\alpha'} p_{\beta'} + d (P_{\alpha'} p_{\beta'} + p_{\alpha'} P_{\beta'}) \quad (24)$$

Nous allons procéder par étapes pour calculer les différents coefficients entrant dans l'expression 24. Voilà pourquoi, dans un premier calcul, nous laisserons de côté les termes en rapport avec la structure interne de la source $f^\mu(k)$. Plus tard, nous tiendrons compte de ces termes. Pour l'instant, nous prenons :

$$J_{\alpha'\beta'} = \frac{1}{[P^2 + m^2]^2} \left[(p+P)^\mu \delta_{\alpha'}^\mu + p^\mu \frac{P_\alpha P_{\alpha'}}{m^2} - g^{\mu\alpha} \left(p_{\alpha'} + \frac{p \cdot P}{m^2} P_{\alpha'} \right) - p_{\alpha'}^\mu \right] \left(g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2} \right)$$

$$x[(p+P)^{\mu\beta}_{\beta} + p^{\mu} \frac{P^{\beta} P_{\beta}}{m^2} - g^{\mu\beta} (p_{\beta} + \frac{p \cdot P}{m^2} P_{\beta}) - P^{\beta} \delta^{\mu}_{\beta}] \quad (25)$$

Afin d'utiliser la symétrie entre $(\mu \leftrightarrow \nu), (\alpha \leftrightarrow \beta), (\alpha' \leftrightarrow \beta')$ de façon efficace, nous allons introduire les tenseurs de troisième ordre suivants :

$$I^{\mu\alpha}_{\alpha'} = P^{\mu} \delta^{\alpha}_{\alpha'} - g^{\mu\alpha} \frac{p \cdot P}{m^2} P_{\alpha'} - \delta^{\mu}_{\alpha'} P^{\alpha} \quad (26a)$$

$$F^{\mu\alpha}_{\alpha'} = p^{\mu} \frac{P^{\alpha} P_{\alpha'}}{m^2} + p^{\mu} \delta^{\alpha}_{\alpha'} - g^{\mu\alpha} p_{\alpha'} \quad (26b)$$

et par suite :

$$J_{\alpha'\beta'} = \frac{1}{[P^2 + m^2]^2} \{ I^{\mu\alpha}_{\alpha'} (g_{\alpha\beta} + \frac{p_{\alpha} p_{\beta}}{m^2}) I^{\beta}_{\mu\beta'} + F^{\mu\alpha}_{\alpha'} (g_{\alpha\beta} + \frac{p_{\alpha} p_{\beta}}{m^2}) F^{\beta}_{\mu\beta'} + (g_{\alpha\beta} + \frac{p_{\alpha} p_{\beta}}{m^2}) (I^{\mu\alpha}_{\alpha'} F^{\beta}_{\mu\beta'} + I^{\beta}_{\mu\beta'} F^{\mu\alpha}_{\alpha'}) \} \quad (27)$$

Remarquons que les expressions

$$[g_{\alpha\beta} + \frac{p_{\alpha} p_{\beta}}{m^2}] I^{\mu\alpha}_{\alpha'} F^{\beta}_{\mu\beta'} \quad \text{et} \quad [g_{\alpha\beta} + \frac{p_{\alpha} p_{\beta}}{m^2}] I^{\beta}_{\mu\beta'} F^{\mu\alpha}_{\alpha'}$$

sont identiques, lorsqu'on échange les indices α' et β' . Il en est de même des expressions $p_{\alpha} I^{\alpha}_{\mu\alpha'}$ et $p_{\beta} I^{\beta}_{\mu\beta'}$. Après avoir effectué les calculs, nous aboutissons aux résultats suivants :

$$I^{\mu\alpha}_{\alpha'} (g_{\alpha\beta} + \frac{p_{\alpha} p_{\beta}}{m^2}) I^{\beta}_{\mu\beta'} = [2P^2 + \frac{(p \cdot P)^2}{m^2}] g_{\alpha'\beta'} + [\frac{3(p \cdot P)^2}{m^4} - 2] P_{\alpha'} P_{\beta'} + \frac{P^2}{m^2} p_{\alpha'} p_{\beta'} - \frac{p \cdot P}{m^2} [P_{\alpha'} p_{\beta'} + P_{\beta'} p_{\alpha'}] \quad (28)$$

$$F_{\mu\alpha}^{\alpha} [g_{\alpha\beta} + \frac{p_{\alpha}p_{\beta}}{m^2}] F_{\beta}^{\mu\beta} = p^2 g_{\alpha\beta} + 2p_{\alpha}p_{\beta} - [2 + \frac{p^2}{m^2} + \frac{(p \cdot P)^2}{m^4}] P_{\alpha} P_{\beta} - \frac{p \cdot P}{m^2} [P_{\alpha} p_{\beta} + p_{\alpha} P_{\beta}] \quad (29)$$

$$[g_{\alpha\beta} + \frac{p_{\alpha}p_{\beta}}{m^2}] [I_{\alpha}^{\mu\alpha} F_{\mu\beta}^{\beta} + I_{\mu\beta}^{\beta} F_{\alpha}^{\mu\alpha}] \quad (30)$$

$$= 2(p \cdot P) g_{\alpha\beta} + \frac{2(p \cdot P)}{m^2} P_{\alpha} P_{\beta} + [\frac{3p \cdot P}{m^2} - 1 - \frac{p^2}{m^2}] [P_{\alpha} p_{\beta} + p_{\alpha} P_{\beta}]$$

En additionnant les expressions 28, 29 et 30, nous obtenons le tenseur symétrique $J_{\alpha\beta}$:

$$J_{\alpha\beta} = [P^2 + m^2]^{-2} \{ [2P^2 + p^2 + (p \cdot P)^2/m^2 + 2p \cdot P] g_{\alpha\beta} + [2 + P^2/m^2] p_{\alpha} p_{\beta} + [2(p \cdot P)^2/m^4 + 2p \cdot P/m^2 - P^2/m^2 - 4] P_{\alpha} P_{\beta} + [(p \cdot P - P^2)/m^2 - 1] [P_{\alpha} p_{\beta} + p_{\alpha} P_{\beta}] \} \quad (31)$$

L'étape suivante est de calculer les termes relatifs à la structure interne de la source $f(k)$, que l'on peut subdiviser en termes linéaires et quadratiques respectivement :

$$\text{Terme linéaire} = [P^2 + m^2]^{-1} \{ -i[(p+P)^{\mu} \delta_{\alpha}^{\alpha'} + p^{\mu} \frac{P^{\alpha} P_{\alpha'}}{m^2} - g^{\mu\alpha} (p_{\alpha} + \frac{p \cdot P}{m^2} P_{\alpha}) - P^{\alpha} \delta_{\alpha}^{\mu}] [g_{\alpha\beta} + \frac{p_{\alpha}p_{\beta}}{m^2}] f_{\mu}(k) + (\alpha' \leftrightarrow \beta') \} \quad (32)$$

où $(\alpha' \leftrightarrow \beta')$ représente le terme qui précède *avec* les indices α' et β' échangés. Après avoir effectué, nous obtenons:

$$\text{Terme linéaire} = [P^2 + m^2]^{-1} \{ -2i(p+P) \cdot f g_{\alpha\beta} - 2i \frac{P \cdot f}{m^2} p_{\alpha} p_{\beta} - 2i \frac{P \cdot f}{m^2} p_{\alpha} P_{\beta} + i(1 + p \cdot P/m^2) [(p+P)_{\alpha} f_{\beta} + f_{\alpha} (p+P)_{\beta}] \} \quad (33)$$

Terme quadratique =

$$- f^\mu \delta_{\alpha'}^\alpha \left[g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2} \right] f_\mu \delta_{\beta'}^\beta = -f^2 \left[g_{\alpha'\beta'} + \frac{p_{\alpha'} p_{\beta'}}{m^2} \right] \quad (34)$$

Maintenant, il faut tenir compte de la cinématique du problème physique considéré, à savoir :

$$P^2 = -M^2 ; p^2 = -m^2 ; (P-p)^2 = k^2 = 0 ; p.P = -(1/2)(M^2 + m^2) \quad (35)$$

Après avoir additionné 31, 33 et 34, en utilisant les relations 35, nous obtenons l'expression générale du tenseur $J_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} = & \left[\frac{M^4 - 10m^2 M^2 - 7m^4}{4m^2 (M^2 - m^2)^2} + \frac{2i(p+P).f}{(M^2 - m^2)} - f^2 \right] g_{\mu\nu} \\ & + \left[\frac{-(M^2 - 2m^2)}{m^2 (M^2 - m^2)^2} + \frac{2iP.f}{m^2 (M^2 - m^2)} - \frac{f^2}{m^2} \right] p_\mu p_\nu \\ & + \left[\frac{M^4 + 2m^2 M^2 - 9m^4}{2m^4 (M^2 - m^2)^2} + \frac{2ip.f}{m^2 (M^2 - m^2)} \right] P_\mu P_\nu \\ & + \left[\frac{M^2 - 3m^2}{2m^2 (M^2 - m^2)^2} \right] [P_\mu p_\nu + p_\mu P_\nu] + (1/2m^2) [(p+P)_\mu f_\nu + f_\mu (p+P)_\nu] \end{aligned} \quad (36)$$

Afin de résoudre le problème, il nous reste encore à choisir un modèle particulier de la structure électromagnétique interne de la source, ce qui revient, en fait, à choisir une transformation de jauge bien explicite. Le ^{plus} simple modèle à choisir est le suivant :

$$i f_\mu(k) = \frac{P_\mu}{(P.k)} \quad (37)$$

Ainsi, l'expression 36 se simplifie de façon très substantielle, et nous obtenons la structure prévue par la formule 24 :

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{4m^2} g_{\mu\nu} - \frac{M^2 - 2m^2}{m^2 (M^2 - m^2)^2} p_\mu p_\nu + \frac{M^4 + 2m^2 M^2 - m^4}{2m^4 (M^2 - m^2)} p_\mu p_\nu - \frac{M^2 + m^2}{2m^2 (M^2 - m^2)^2} [p_\mu p_\nu + p_\nu p_\mu] \quad (38)$$

L'étape suivante consiste à évaluer l'intégrale 23 :

$$I_{\mu\nu} = \int d\omega_p d\omega_k (2\pi)^3 \delta(p+k-P) J_{\mu\nu} \quad (39)$$

Pour effectuer cette évaluation, nous utilisons le résultat bien connu :

$$I_0 = \int d\omega_p d\omega_k (2\pi)^3 \delta(p+k-P) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 - \frac{m^2}{M^2} \right] \quad (40)$$

Par conséquent, nous allons avoir à calculer un genre de valeur moyenne. En effet, définissons l'objet suivant :

$$\langle (\dots) \rangle = \int d\omega_p d\omega_k (2\pi)^3 \delta(p+k-P) (\dots) / I_0 \quad (41)$$

Compte tenu des équations 38 et 39 et de la définition 41, il nous faut évaluer les quantités suivantes: $\langle p_\alpha \rangle$ et $\langle p_\alpha p_\beta \rangle$, qui sont respectivement des fonctions vectorielle et tensorielle des vecteurs et tenseurs disponibles, à savoir, P_α d'une part, et, $g_{\alpha\beta}$ et $P_\alpha P_\beta$ d'autre part.

Par suite, nous pouvons écrire les valeurs moyennes vectorielle et tensorielle de la manière suivante :

$$\langle p_\alpha \rangle = a_1 P_\alpha \quad ; \quad \langle p_\alpha p_\beta \rangle = a_2 g_{\alpha\beta} + b_2 P_\alpha P_\beta \quad (42)$$

$$\text{Alors : } \quad P^\alpha \langle p_\alpha \rangle = p \cdot P = a_1 P^2 \quad ; \quad a_1 = \frac{M^2 + m^2}{2M^2} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \text{De même : } \quad \langle p^\alpha p_\alpha \rangle &= -m^2 = 4a_2 - M^2 b_2 \\ P^\alpha P^\beta \langle p_\alpha p_\beta \rangle &= (p \cdot P)^2 = a_2 M^2 + b_2 M^4 \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$a_2 = \frac{(M^2 - m^2)^2}{12M^2} \quad ; \quad b_2 = \frac{M^4 + m^2 M^2 + m^4}{3M^4} \quad (44)$$

Maintenant, appliquons les résultats 42, 43 et 44 à l'évaluation de l'intégrale 39 . Nous obtenons :

$$I_{\mu\nu} = I_0 A(M^2) g_{\mu\nu} + I_0 B(M^2) P_\mu P_\nu \quad (45)$$

où les fonctions $A(M^2)$ et $B(M^2)$ sont les suivantes :

$$A(M^2) = \frac{M^2 + m^2}{6m^2 M^2} \quad ; \quad B(M^2) = \frac{3M^4 + 7m^2 M^2 + 4m^4}{6m^4 M^4} \quad (46)$$

La dernière étape consiste à remplacer l'expression du tenseur $I_{\mu\nu}$, ainsi obtenue, dans l'expression 22a de l'amplitude du vide. Par suite :

$$V.A. = -\frac{\alpha}{4\pi} \int d\omega_P dM^2 \left[1 - \frac{m^2}{M^2}\right] K_1^\mu(-P) [A(M^2) g_{\mu\nu} + B(M^2) P_\mu P_\nu] K_2^\nu(P) \quad (47)$$

où $\alpha = e^2/4\pi$, $A(M^2)$ et $B(M^2)$ sont les fonctions positives définies par les relations 46.

Au lieu d'écrire l'amplitude du vide en fonction des sources d'émission et d'absorption, nous voulons trouver son expression en fonction du champ vectoriel ϕ^μ et du champ tensoriel $G^{\mu\nu}$, en utilisant l'équation de champ au premier ordre :

$$K^\mu(P) = i P_\nu G^{\mu\nu}(P) + m^2 \phi^\mu(P) \quad (48)$$

Remarquons en particulier les propriétés suivantes :

$$G_{\mu\nu}(-P) G^{\mu\nu}(P) = 2P^2 \phi^\mu(-P) \phi_\mu(P) - 2P_\mu \phi_\nu(-P) P^\nu \phi^\mu(P) \quad (49)$$

$$P^\nu G_{\mu\nu}(-P) P_\lambda G^{\mu\lambda}(P) = (1/2) P^2 G_{\mu\nu}(-P) G^{\mu\nu}(P) \quad (50)$$

$$K^\mu(-P) K_\mu(P) = m^2 G_{\mu\nu}(-P) G^{\mu\nu}(P) + P^\nu G_{\mu\nu}(-P) P_\lambda G^{\mu\lambda}(P) + m^4 \phi_\mu(-P) \phi^\mu(P) \quad (51)$$

Utilisant les trois propriétés ci-dessus ; et du fait de l'antisymétrie du tenseur $G_{\mu\nu}$, nous obtenons les résultats suivants :

$$K^\mu(-P) K_\mu(P) = -\frac{1}{2M^2} (M^2 - m^2) G_{\mu\nu}(-P) G^{\mu\nu}(P) - \frac{m^4}{M^2} P_\mu \phi^\mu(-P) P_\nu \phi^\nu(P) \quad (52)$$

$$P_\mu K^\mu(-P) P_\nu K^\nu(P) = m^4 P_\mu \phi^\mu(-P) P_\nu \phi^\nu(P) \quad (53)$$

Introduisons les fonctions $a(M^2)$ et $b(M^2)$ tel que :

$$a(M^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{(M^2 - m^2)^3 (M^2 + m^2)}{6m^2 M^6} ; b(M^2) = \frac{\alpha}{4} \frac{(M^2 - m^2)(M^2 + m^2)^2}{2M^6} \quad (54)$$

l'expression finale de l'amplitude du vide prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} V.A. = & \int dM^2 a(M^2) d\omega_P (1/4) G^{\mu\nu}(-P) G_{\mu\nu}(P) \\ & - \int dM^2 b(M^2) d\omega_P (1/2) P_\mu \Phi^\mu(-P) P_\nu \Phi^\nu(P) \end{aligned} \quad (55)$$

où nous avons tenu compte de l'uniformité dans l'espace-temps.

Nous venons de faire la connection avec l'étude préliminaire sur la fonction de propagation des particules de spin 1.

Exactement comme illustré dans la présentation générale, nous séparons les fonctions de propagation longitudinale et transversale, en appliquant à la fonction de propagation les opérateurs de projection longitudinal et transversal respectivement. En extrapolant dans l'espace-temps et en tenant compte des termes de contact appropriés, nous aboutissons au résultat suivant :

$$\bar{A}_T = \frac{1}{p^2 + m^2 + p^2 (p^2 + m^2)^2 \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{a(M^2)}{(M^2 - m^2)^2} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon}} \quad (56)$$

$$\bar{A}_L = \frac{1}{m^2 + p^2 (p^2 + m^2) \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{b(M^2)}{(M^2 - m^2)} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon}} \quad (57)$$

Comme le prévoit la théorie, les fonctions $a(M^2)$ et $b(M^2)$ sont des fonctions non-négatives. D'autre part, les intégrales

apparaissant dans les expressions 56 et 57 sont des intégrales parfaitement convergentes, puisque $a(M^2)$ et $b(M^2)$ se comportent respectivement comme M^2 et une constante, pour les valeurs élevées de M^2 , d'une part, et ne possèdent aucune singularité pour $M^2=m^2$.

Rappelons, toutefois, que notre calcul est valable, dans la mesure où le temps est suffisamment long pour mesurer la masse de la particule, mais aussi suffisamment court, de façon à pouvoir négliger l'instabilité de la particule. Autrement dit, le processus physique, que nous considérons ici, est celui où la particule est stable. La largeur de résonance d'une particule stable est nulle. Dans notre cas particulier, nous pouvons très bien le vérifier, en remarquant que :

$$\Gamma = \Gamma(m) = \text{ma}(m^2) = 0 \quad (58)$$

puisque $a(m^2)=0$.

... and the ... of the ...
... and the ... of the ...
... and the ... of the ...

V - Etude de la fonction de propagation modifiée
des particules vectorielles

1 - Comportement asymptotique pour les valeurs élevées de p^2

Désignons par $I(p^2)$ et $J(p^2)$ les intégrales spectrales apparaissant dans les composantes respectivement transversale et longitudinale de la fonction de propagation, données par les formules (IV-56,57):

$$I(p^2) = \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{a(M^2)}{(M^2 - m^2)^2} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon} \quad (1)$$

$$J(p^2) = \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{b(M^2)}{(M^2 - m^2)} \frac{1}{p^2 + M^2 - i\epsilon} \quad (2)$$

Lorsque l'on considère les valeurs de $p^2 \rightarrow \infty$, seules les valeurs élevées de M^2 donnent une contribution appréciable à l'évaluation des deux intégrales envisagées, de sorte que l'on peut approximer les fonctions a et b par leur comportement aux valeurs élevées de M^2 . En utilisant les expressions de a et b données au chapitre (IV-54), nous avons:

$$\frac{a(M^2)}{(M^2 - m^2)^2} \sim \frac{1}{M^2} ; \quad \frac{b(M^2)}{(M^2 - m^2)} \sim \frac{1}{M^2} \quad (3)$$

De sorte que les deux intégrales $I(p^2)$ et $J(p^2)$ ont le même comportement asymptotique

$$\int dM^2 \frac{1}{M^2(p^2 + M^2)} \sim \frac{1}{p^2} \text{Log} p^2 \quad (4)$$

Remarquant que les fonctions de propagation, $\bar{\Delta}_T$ et $\bar{\Delta}_L$, s'écrivent:

$$\bar{\Delta}_T = \frac{1}{p^2 + m^2 + p^2(p^2 + m^2)^2 I(p^2)}, \quad \bar{\Delta}_L = \frac{1}{m^2 + p^2(p^2 + m^2) J(p^2)} \quad (5)$$

il est intéressant de remarquer que le comportement asymptotique est exactement celui que l'on prévoit expérimentalement, à savoir

$$\bar{\Delta}_T(p^2) \sim 1/(p^2)^2 \text{Log } p^2 \quad \text{pour } p^2 \rightarrow \infty \quad (6)$$

c'est à dire une décroissance supérieure à $1/p^2$, en fait une décroissance de la forme $[p^2]^{-d}$ avec $d \geq 2$.

Le calcul asymptotique, que nous venons de faire, peut s'obtenir en évaluant exactement les intégrales $I(p^2)$ et $J(p^2)$. Nous allons le faire, d'autant plus que le résultat nous sera de très grande utilité par la suite. En fait, nous désirons connaître les fonctions ci-dessus pour toutes les valeurs complexes de l'argument p^2 . Pour $p^2 > -m^2$, les fonctions à intégrer n'ont pas de singularités dans le domaine d'intégration. Ainsi, nous évaluerons les intégrales pour des valeurs réelles de p^2 supérieures à $-m^2$, et nous prolongerons analytiquement le résultat obtenu dans tout le plan complexe p^2 .

$$\begin{aligned} I(p^2) &= \frac{\alpha}{24\pi m^2} \int_{m^2}^{\infty} dx \frac{x - m^4}{x^3(p^2 + x)} \\ &= \frac{\alpha}{24\pi m^2} \left[\int_{m^2}^{\infty} \frac{dx}{x(p^2 + x)} - m^4 \int_{m^2}^{\infty} \frac{dx}{x^3(p^2 + x)} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 J(p^2) &= \frac{\alpha}{8\pi} \int_{m^2}^{\infty} dx \frac{(x+m^2)^2}{x^3(p^2+x)} \\
 &= \frac{\alpha}{8\pi} \int_{m^2}^{\infty} dx \left[\frac{1}{x(p^2+x)} + \frac{2m^2}{x^2(p^2+x)} + \frac{m^4}{x^3(p^2+x)} \right] \quad (8)
 \end{aligned}$$

En utilisant les décompositions suivantes:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x(p^2+x)} &= \frac{1}{p^2 x} - \frac{1}{p^2(p^2+x)} \\
 \frac{1}{x^3(p^2+x)} &= \frac{1}{p^2 x^3} + \frac{1}{p^6 x} - \frac{1}{p^4 x^2} - \frac{1}{p^6(p^2+x)} \\
 \frac{1}{x^2(p^2+x)} &= \frac{1}{p^2 x^2} + \frac{1}{p^4(p^2+x)} - \frac{1}{p^4 x}
 \end{aligned}$$

nous obtenons les résultats suivants

$$I(p^2) = \frac{\alpha}{24\pi m^2 p^6} \left[(p^4 - m^4) \text{Log} \frac{p^2 + m^2}{m^2} + \frac{p^2}{2} (2m^2 - p^2) \right] \quad (9)$$

$$J(p^2) = \frac{\alpha}{8\pi p^6} \left[(p^2 - m^2)^2 \text{Log} \frac{p^2 + m^2}{m^2} + \frac{p^2}{2} (5p^2 - 2m^2) \right] \quad (10)$$

Il est évident que, lorsque l'on effectue le prolongement analytique de I et J dans tout le plan complexe p^2 , nous rencontrons une singularité, due à la fonction logarithmique, qui n'est autre qu'une coupure le long de l'axe réel allant de $-\infty$ à $-m^2$. Nous démontrerons de façon explicite, dans la section suivante, que les deux fonctions considérées ne présentent pas de singularité au point $p^2=0$. Toutefois, il est possible de vérifier le comportement asymptotique obtenu plus haut, en utilisant directement les expressions (9) et (10) et en faisant tendre p^2 vers ∞ .

2 - Recherche des singularités le long de l'axe réel

Pour des raisons d'ordre physique, il ne faut pas s'attendre à rencontrer des pôles le long de l'axe réel, dans le plan complexe p^2 , mis à part le pôle simple situé à $-p^2=m^2$. Toutefois, il est absolument indispensable de vérifier que la théorie des sources ne fait pas de fausses prédictions.

Commençons par noter que les valeurs physiques de p^2 sont celles obtenues en approchant la coupure, signalée au la section (V-1), par valeurs imaginaires négatives. D'autre part, les singularités de la fonction de propagation globale, $\Delta_{\mu\nu}$, si elles existent, ne sont autre que les singularités de Δ_T et Δ_L . Voilà pourquoi, nous écrirons les fonctions précitées sous la forme suivante:

$$\Delta_T(p^2) = \frac{1}{(p^2+m^2) g(p^2)} \quad , \quad \Delta_L(p^2) = \frac{1}{m^2 h(p^2)} \quad (11)$$

de sorte qu'il nous faudra étudier les zéros des fonctions $g(p^2)$ et $h(p^2)$ données par les formules

$$g(p^2) = 1 + \frac{\alpha}{24\pi m^2} \frac{p^2+m^2}{p^4} \left[(p^4-m^4) \text{Log} \frac{p^2+m^2}{m^2} + \frac{p^2}{2} (2m^2-p^2) \right] \quad (12)$$

$$h(p^2) = 1 + \frac{\alpha}{8\pi m^2} \frac{p^2+m^2}{p^4} \left[(p^2-m^2)^2 \text{Log} \frac{p^2+m^2}{m^2} + \frac{p^2}{2} (5p^2-2m^2) \right] \quad (13)$$

L'avantage d'écrire les choses sous cette forme est d'isoler le pôle simple à $-p^2=m^2$, et d'avoir des fonctions g et h sans dimension. Pour encore plus de commodité, il est intéressant de

remplacer la variable p par une variable sans dimension, en posant:

$$p^2 = m^2 z \quad (14)$$

Ainsi les fonctions g et h deviennent des fonctions sans dimension de la variable sans dimension z , qui est, en général, complexe.

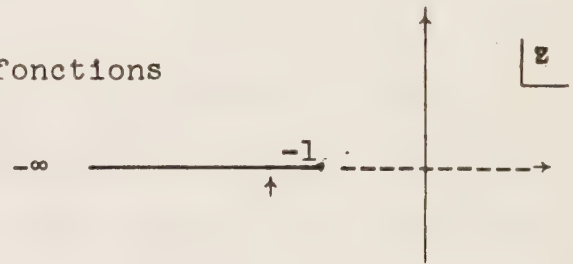
Sans changer de nom aux fonctions, nous écrirons

$$g(z) = 1 + \frac{\alpha}{24\pi} \frac{z+1}{z^2} [(z^2-1)\text{Log}(z+1) + \frac{z}{2}(2-z)] \quad (15)$$

$$h(z) = 1 + \frac{\alpha}{8\pi} \frac{z+1}{z^2} [(z-1)^2\text{Log}(z+1) + \frac{z}{2}(5z-2)] \quad (16)$$

Ainsi dans le plan complexe z , les fonctions

g et h sont multiformes le long de la coupure, tel que mentionné sur la figure ci-contre. Les valeurs



physiques de ces fonctions sont obtenues pour les valeurs de z approchant la coupure, par en bas, comme l'indique la flèche sur la figure. Décomposons z en parties réelle et imaginaire:

$$z = x + iy \quad (17)$$

Nous divisons notre étude en deux parties, l'une correspondant à $x < -1$, l'autre à $x \geq -1$.

Cas $x < -1$: Nous devons envisager les possibilités où y tend vers zero par valeurs positives et négatives, de sorte que le prolongement analytique des expressions (15) et (16) est:

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} g(x+iy) = 1 + \frac{\alpha}{24\pi} \frac{x+1}{x^2} [(x^2-1)(\pm i\pi + \text{Log}|1+x|) + \frac{x}{2}(2-x)] \quad (18)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} h(x+iy) = 1 + \frac{\alpha}{8\pi} \frac{x+1}{x^2} [(x-1)^2(\pm i\pi + \text{Log}|1+x|) + \frac{x}{2}(5x-2)] \quad (19)$$

La condition nécessaire et suffisante que les deux expressions ci-dessus s'annulent est que leurs parties réelle et imaginaire s'annulent pour la même valeur de la variable x . Il est évident que, pour $x = -1$, les parties imaginaires sont différentes de zéro. Par un examen rapide, nous pouvons affirmer également que les fonctions considérées ne possèdent pas de zéros dans le voisinage immédiat de la coupure.

Cas $x \geq -1$ Les fonctions g et h sont parfaitement définies et non multiformes, de sorte que les expressions (15) et (16) restent valables, en remplaçant simplement z par x . Pour plus de commodité, nous allons introduire des fonctions auxiliaires $f_1(x)$, $f_2(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ et $u(x)$ définies de la manière suivante:

$$g(x) = 1 + \frac{\alpha}{24\pi} f_1(x) \quad , \quad f_1(x) = u(x) v_1(x) \quad (20)$$

$$h(x) = 1 + \frac{\alpha}{8\pi} f_2(x) \quad , \quad f_2(x) = u(x) v_2(x) \quad (21)$$

$$u(x) = \frac{x+1}{x^2} \geq 0 \quad \text{pour} \quad x \geq -1 \quad (22)$$

Comme la constante de couplage α est positive ($\alpha = e^2/4\pi$), les zéros de g et h ne peuvent avoir lieu que si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont négatifs. Comme $u(x) \geq 0$, il suffit d'étudier le signe des fonctions $v_1(x)$ et $v_2(x)$. En fait, comme nous désirons démontrer qu'il

n'y a pas de singularité, ou plutôt de zéros, dans le voisinage immédiat de l'axe réel, nous allons faire une étude complète des fonctions $g(x)$ et $h(x)$. Remarquons tout d'abord que:

$$v_1'(x) = 2x \log(x+1) \quad , \quad v_1'(x) \geq 0 \quad (23)$$

$$v_2'(x) = \frac{1}{1+x} [2(x^2-1)\log(x+1) + 6x^2 + 2x^2] \quad (24)$$

Pour $x \geq 1$, il est évident que $v_2'(x)$ est positif. Il est possible de démontrer que ceci est vrai pour $0 \leq x < 1$. En effet dans cette région, nous pouvons prendre le développement en série du logarithme et l'on trouve que:

$$v_2'(x) = \frac{1}{1+x} [7x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^4)] \geq 0 \quad (25)$$

Etudions le comportement de v_1 et v_2 au voisinage de l'origine:

$$v_1(x) = \frac{2x^3}{3} + o(x^4) \quad , \quad v_1(x) \geq 0 \text{ pour } x \geq 0, \text{ au voisinage de l'origine} \quad (26)$$

Comme $v_1'(x)$ est non négatif pour $x \geq 0$, nous déduisons que

$$v_1(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0 \quad (27)$$

De même; au voisinage de l'origine:

$$v_2(x) = \frac{7x^3}{3} + o(x^4) \quad (28)$$

Etant donné la propriété (25), nous déduisons que

$$v_2(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \geq 0 \quad (29)$$

Des propriétés que nous venons de démontrer, nous concluons que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions non négatives pour $x \geq 0$, et par conséquent, g et h ne peuvent avoir de zéros dans cette région. Il nous reste à investiguer la région $-1 \leq x < 0$.

Des résultats (26) et (28), nous déduisons que dans le voisinage de l'origine

$$f_1(x) \sim \frac{1+x}{x^2} \frac{2x^3}{3} = \frac{2}{3}x(x+1) \rightarrow 0 \quad \text{pour } x \rightarrow 0 \quad (30)$$

$$f_2(x) \sim \frac{1+x}{x^2} \frac{7x^3}{3} = \frac{7}{3}x(x+1) \rightarrow 0 \quad \text{pour } x \rightarrow 0 \quad (31)$$

D'autre part, comme $(x+1)\text{Log}(x+1) > 0$ pour $x > -1$, alors

$$f_1(x) \text{ et } f_2(x) \rightarrow 0 \quad \text{pour } x \rightarrow -1 \quad (32)$$

Pour l'étude des dérivées des fonction f_1 et f_2 , notons que

$$f'_{1,2} = u'(x)v_{1,2}(x) + u(x)v'_{1,2}(x) \quad ; \quad u'(x) = -\frac{2+x}{x^3} \quad (33)$$

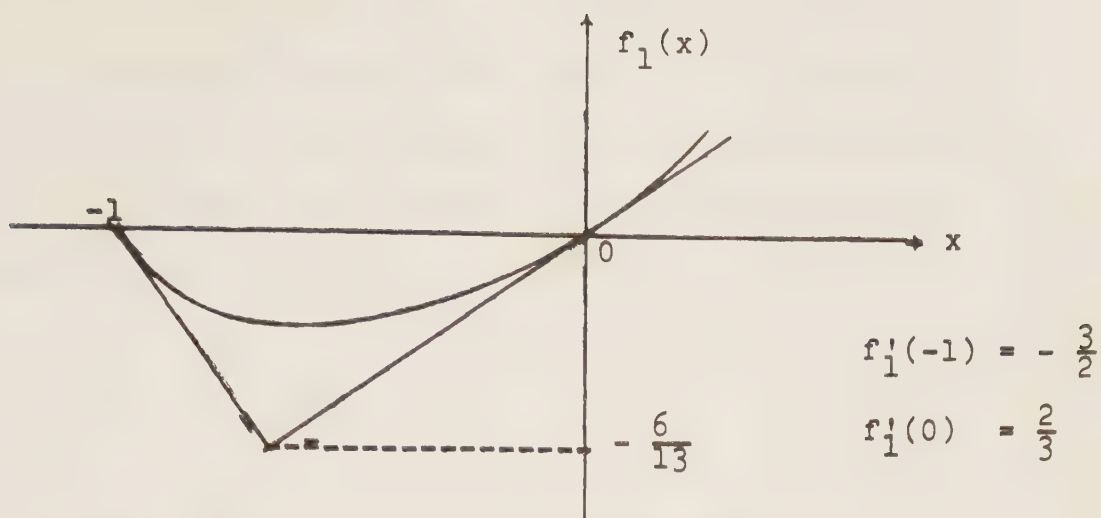
Ainsi, en utilisant les relations (23) et (24), nous avons:

$$f'_1(x) = -\frac{2+x}{x^3} [(x^2-1)\text{Log}(1+x) + \frac{x}{2}(2-x)] + \frac{2(1+x)}{x}\text{Log}(1+x) \quad (34)$$

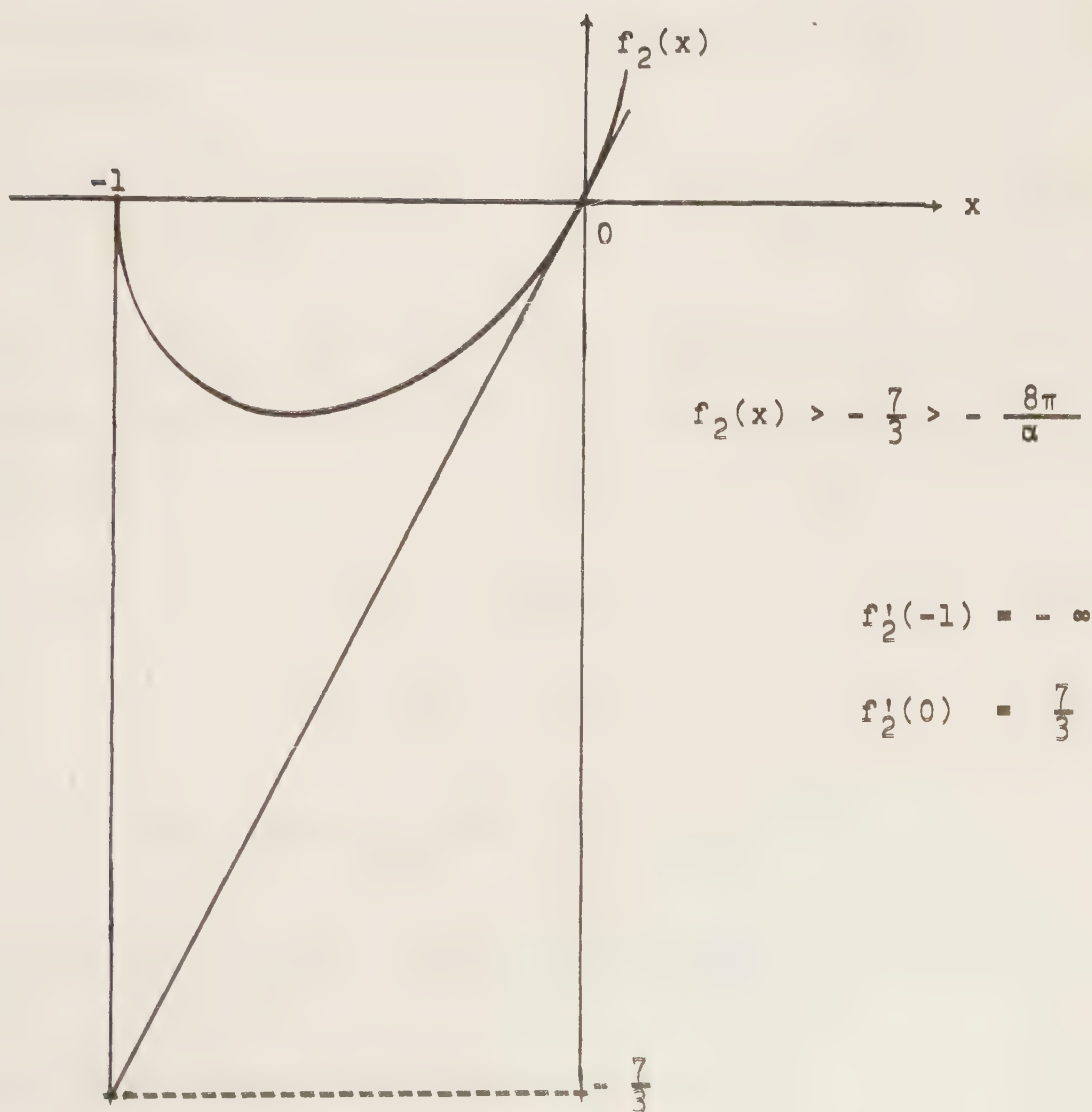
$$f'_2(x) = \frac{x^3+x-2}{x^3} \text{Log}(1+x) + \frac{1}{2x^2}[7x^2-4x+4] \quad (35)$$

Ceci nous permet de déduire les valeurs de f'_1 et f'_2 aux points $x=-1$ et $x=0$, et par conséquent de représenter graphiquement l'allure

des courbes $f_1(x)$ et $f_2(x)$.



$$f_1(x) \geq -\frac{6}{13} > -\frac{24\pi}{\alpha}$$



Comme conséquence directe de notre recherche des zéros des fonctions g et h le long de l'axe réel, ces fonctions n'ont pas de zéros dans le voisinage immédiat de l'axe réel, à cause de la petitesse de la constante de couplage. Nous pouvons même affirmer que les zéros, s'ils existent, doivent correspondre à x et y élevés comparés à l'unité, ceci en remarquant que :

$$A = \frac{8\pi}{\alpha} \cong 3450 \quad (36)$$

3 - Recherche des singularités dans le plan complexe

De notre étude de la section précédente, nous déduisons que les solutions de

$$g(z) = 0 \quad \text{et} \quad h(z) = 0 \quad (37)$$

sont tel que z grand comparé à l'unité. D'autre part, le point $z=0$ n'étant pas un point singulier de g et h , les équations (37) sont équivalentes à :

$$Az^2 + (1+z)[(z-1)^2 \text{Log}(1+z) + \frac{z}{2}(5z-2)] = 0 \quad (38)$$

$$3Az^2 + (1+z)[(z^2-1)\text{Log}(1+z) + \frac{z}{2}(2-z)] = 0 \quad (39)$$

Effectuons les simplifications suivantes :

$$\text{Log}(1+z) \cong \text{Log } z, \quad z \cong z+1, \quad \text{Log } z \text{ négligeable devant } z \quad (40)$$

et recherchons les racines des équations simplifiées

$$g(z) = 0 \leftrightarrow 3A + z \operatorname{Log} z - \frac{1}{2}z = 0 \quad (41)$$

$$h(z) = 0 \leftrightarrow A + z \operatorname{Log} z + \frac{5}{2}z = 0 \quad (42)$$

Maintenant posons

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{ou } r \neq 0 \text{ et } -\pi < \theta < \pi \quad (43)$$

de sorte que nous avons à résoudre les systèmes d'équation:

$$g(z) = 0 \leftrightarrow r = 3A \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad \operatorname{Log} r + \frac{\pi}{2} = -\theta \cot \theta \quad (44)$$

$$h(z) = 0 \leftrightarrow r = A \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad \operatorname{Log} r + \frac{5}{2} = -\theta \cot \theta \quad (45)$$

Nous allons rechercher les solutions des systèmes (44) et (45) par itération. Commençons par analyser le système (44).

Solutions du système (44). Nous savons que r doit être grand et du même ordre de grandeur que l'inverse de la constante de couplage. Donc supposons que $r = A$ en première approximation, et recherchons la valeur de l'angle θ en utilisant la seconde équation: $\operatorname{Log} r = \operatorname{Log} A = 8,15$ et par suite $8,15 - 0,5 = \theta \cot \theta$. La solution s'obtient encore par itération (ou bien en recherchant dans les tables numériques - nous avons préféré utiliser la méthode par itération): $\theta = 2,79 \text{ radians} = \pm 160^\circ$. Remplaçant cette valeur de θ dans la première équation, nous trouvons une seconde valeur approchée de r , $r = 1270.$, et ainsi de suite. Le processus est très rapidement convergent, et au bout de deux itérations nous aboutissons au résultat:

$$r = 1410 \quad , \quad \theta = \pm 157,9^\circ$$

(46)

Solutions du système (45) Nous procédons exactement de la même manière, en prenant comme première approximation, $r=A=3450$. Comme dans le premier cas, le processus est très rapidement convergent, de sorte que l'on obtient les solutions avec une très grande précision au bout de trois itérations. La réponse est

$$r = 386 \quad , \quad \theta = \pm 161,6^\circ$$

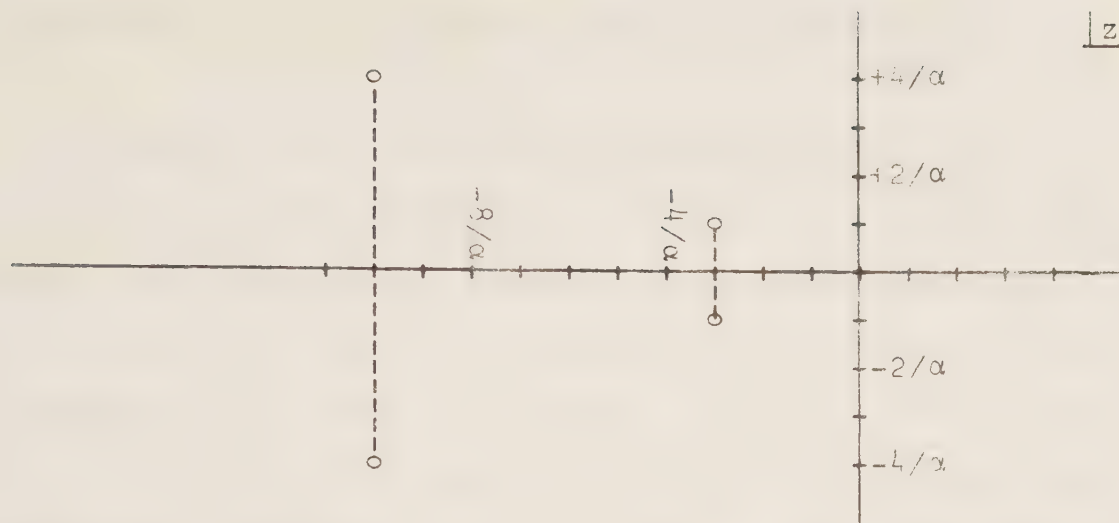
(47)

Précision des calculs effectués: Rappelons que nous avons situé la position des zéros des fonctions $g(z)$ et $h(z)$, en faisant les approximations (40). Vérifions sur les résultats obtenus (46) et (47) que ces approximations étaient justifiées et déterminons ensuite la précision de nos calculs.

Dans le cas $g(z) = 0$, négliger $\text{Log} r$ comparé à r revient à négliger $\text{Log} 1410 = 7,25$ comparé à 1410, d'où une précision de l'ordre de 0,5%. Par conséquent, l'erreur que nous commettons en évaluant $\text{Arg} z = \theta$ est de l'ordre de $0,32^\circ$.

Dans le cas $h(z) = 0$, cela revient à négliger $\text{Log} 386 = 5,95$ comparé à 386, soit une précision de l'ordre de 1,6%. L'erreur correspondante que l'on commet sur l'évaluation de l'argument est de $0,9^\circ$.

Il est évident que la précision de nos calculs est largement suffisante, et dépasse largement la précision que l'on obtiendrait expérimentalement.



Le diagramme ci-dessus montre la location des zéros des fonctions $g(z)$ et $h(z)$, dans le plan complexe z . Il est à noter que ces zéros sont deux à deux complexe conjugué l'un de l'autre, comme nous devions le deviner, puisque les fonctions g et h satisfont à la propriété de réflexion de Schwarz, à savoir

$$g(z) = [g(z^*)]^* \quad , \quad h(z) = [h(z^*)]^* \quad (48)$$

Ces zéros correspondent à des pôles simples de composantes, longitudinale et transversale, Δ_L et Δ_T , de la fonction de propagation modifiée $\bar{\Delta}_{uv}$. Les pôles situés dans le premier feuillet de Riemann sont associés à des résonances, dont la largeur, mesurée par le rapport de la partie imaginaire à la partie réelle, est énorme (de l'ordre de $1/3$ et $2/5$). Ainsi, ces résonances correspondent à des particules de si grande instabilité qu'elles sont expérimentalement non décelables. Voilà pourquoi nous disons que ces pôles sont physiquement acceptables.

4 - Détermination de la fonction causale de propagation

La théorie des sources est une théorie basée sur le principe de causalité. Remarquons, en passant, que la méthode de calcul des diagrammes de Feynman est essentiellement non causale, puisqu'il n'est fait aucune mention de causalité sur les propagateurs de champ. Par contre, notons que la causalité a joué un rôle primordial dans le processus physique que nous considérons au chapitre IV. De là vient la nécessité d'évaluer de façon explicite la fonction de propagation modifiée pour des situations physiques causales, à savoir:

$$\bar{\Delta}_{\mu\nu}(x-x') = \int \frac{(dp)}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-x')} \bar{\Delta}_{\mu\nu}(p) \quad \text{pour } x^0 > x'^0 \quad (49)$$

Rappelons que $\bar{\Delta}_{\mu\nu}(p)$ est relié à $\bar{\Delta}_T$ et $\bar{\Delta}_L$ de la manière suivante:

$$\bar{\Delta}^{\mu\nu}(p) = [g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}] \bar{\Delta}_T(p^2) + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \bar{\Delta}_L(p^2) \quad (50)$$

avec $\bar{\Delta}_T$ et $\bar{\Delta}_L$ tel que donnés par les relations (11). L'équation (49) peut encore s'écrire:

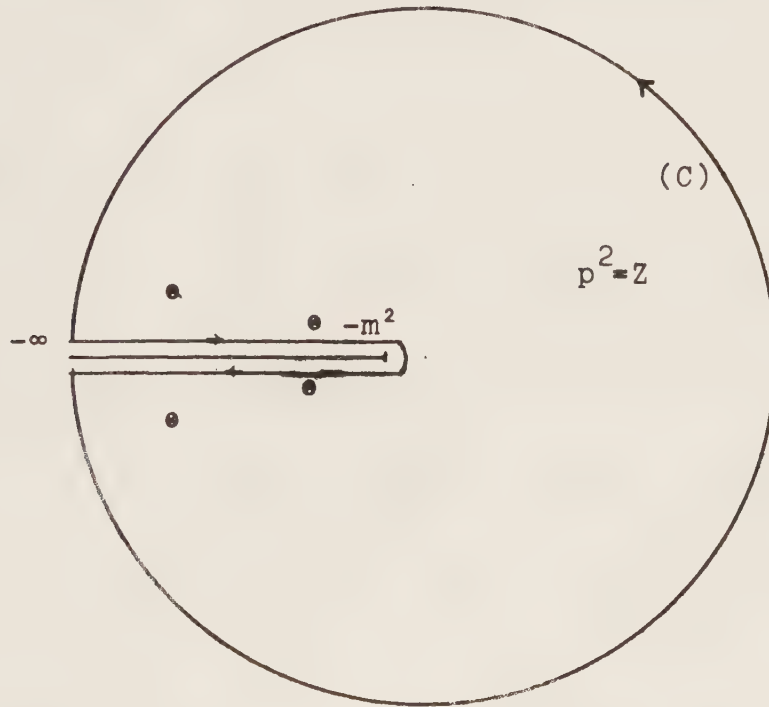
$$\bar{\Delta}_{\mu\nu}(x-x') = i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{x}')} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 e^{-ip^0(x^0-x'^0)} \bar{\Delta}_{\mu\nu}(p) \quad (51)$$

de sorte que nous devons évaluer l'intégrale sur la variable p^0 , en tenant compte de la condition causale $x^0 > x'^0$. Comme la fonction de propagation $\bar{\Delta}_{\mu\nu}(p)$ a les mêmes singularités que $\bar{\Delta}_T$ et $\bar{\Delta}_L$, à savoir les quatre pôles complexes et la coupure le long de

l'axe réel allant de $-\infty$ à $-m^2$, en plus du pôle simple à $-p^2 = m^2$, nous allons rechercher, d'abord, les relations de dispersion auxquelles satisfont les fonctions $[1/g(p^2)]$ et $[1/h(p^2)]$. Désignons les zéros des fonctions g et h , dans le plan complexe p^2 , par $\bar{p}_1^2$, $\bar{p}_1^{2*}$ et $\bar{p}_2^2$, $\bar{p}_2^{2*}$. Posons

$$g(p^2) = 0 \leftrightarrow \bar{p}_1^2 = -M_1^2 + i\Gamma_1 M_1^2, \quad \bar{p}_1^{2*} = -M_1^2 - i\Gamma_1 M_1^2 \quad (52)$$

$$h(p^2) = 0 \leftrightarrow \bar{p}_2^2 = -M_2^2 + i\Gamma_2 M_2^2, \quad \bar{p}_2^{2*} = -M_2^2 - i\Gamma_2 M_2^2 \quad (53)$$



En utilisant le fait que

$$g(p^2) \text{ et } h(p^2) \sim p^2 \text{ Log } p^2 \text{ pour } |p^2| \rightarrow \infty \quad (54)$$

nous choisissons dans le plan complexe Z le contour (C) , le long duquel nous allons évaluer les intégrales suivantes:

$$\oint_{(C)} \frac{dZ}{(Z-p^2+i\epsilon)g(Z)}, \quad \oint_{(C)} \frac{dZ}{(Z-p^2+i\epsilon)h(Z)} \quad (55)$$

Dans les expressions (55) ci-dessus, qui sont fonctions de la variable p^2 , nous avons introduit le facteur $i\epsilon$, pour insister sur le fait que le sens physique de ces expressions est obtenu pour les valeurs réelles négatives de p^2 , en prenant la limite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (p^2 - i\epsilon) \quad (56)$$

A cause de la propriété (54), la contribution provenant du cercle à l'infini est nulle. Par suite:

$$\begin{aligned} \int_{(C)} \frac{dZ}{(Z-p^2+i\epsilon)(g(p^2))} &= 2\pi i \sum \text{Résidus} \\ &= \int_{-\infty}^{-m^2} \frac{dZ}{(Z-p^2+i\epsilon)} \left[\frac{1}{g^a(Z)} - \frac{1}{g^b(Z)} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \int_{(C)} \frac{dZ}{(Z-p^2+i\epsilon)h(p^2)} &= 2\pi i \sum \text{Résidus} \\ &= \int_{-\infty}^{-m^2} \frac{dZ}{(Z-p^2+i\epsilon)} \left[\frac{1}{h^a(Z)} - \frac{1}{h^b(Z)} \right] \end{aligned} \quad (58)$$

où nous définissons les fonction $g^{a,b}$ et $h^{a,b}$ comme étant

$$g^{a,b}(Z) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} g(Z \pm i\epsilon) \quad , \quad h^{a,b}(Z) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} h(Z \pm i\epsilon) \quad (59)$$

Nous avons signalé dans les relations (48) que les fonctions g et h satisfont la propriété de reflection de Schwarz. Cette propriété se reflète sur les fonctions $g^{a,b}$ et $h^{a,b}$ définis par (59). Utilisons la et effectuons le changement de variable $Z = -M^2$ dans l'évaluation des intégrales spectrales (57) et (58); nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-m^2} \frac{dZ}{Z-p^2+i\epsilon} \left[\frac{1}{g^a(Z)} - \frac{1}{g^b(Z)} \right] &= \int_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2+M^2-i\epsilon} \left[\frac{1}{g^b(-M^2)} - \frac{1}{g^a(-M^2)} \right] \\
&= \int_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2+M^2-i\epsilon} \frac{2i \operatorname{Im} g^a(-M^2)}{|g^a(-M^2)|^2} \quad (60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-m^2} \frac{dZ}{Z-p^2+i\epsilon} \left[\frac{1}{h^a(Z)} - \frac{1}{h^b(Z)} \right] &= \int_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2+M^2-i\epsilon} \left[\frac{1}{h^b(-M^2)} - \frac{1}{h^a(-M^2)} \right] \\
&= \int_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2+M^2-i\epsilon} \frac{2i \operatorname{Im} h^a(-M^2)}{|h^a(-M^2)|^2} \quad (61)
\end{aligned}$$

Les expressions $g^a(-M^2)$ et $h^a(-M^2)$ se déduisent des relations (12) et (13) d'une part, et des définitions (59), et par suite:

$$g^a(-M^2) = 1 + \frac{(-M^2+m^2)}{24\pi m^2 M^4} \left[(M^4-m^4) \left(\operatorname{Log} \frac{M^2-m^2}{m^2} + i\pi \right) - \frac{M^2}{2} (2m^2+M^2) \right] \quad (62)$$

$$h^a(-M^2) = 1 + \frac{(-M^2+m^2)}{8\pi m^2 M^4} \left[(M^2+m^2)^2 \left(\operatorname{Log} \frac{M^2-m^2}{m^2} + i\pi \right) + \frac{M^2}{2} (5M^2+2m^2) \right] \quad (63)$$

Dans le domaine d'intégration $M^2 \geq m^2$, il est possible de définir deux fonctions non négatives $A(M^2)$ et $B(M^2)$:

$$A(M^2) = \frac{\alpha(M^2-m^2)(M^4-m^4)}{24\pi m^2 M^4} \frac{1}{|g^a|^2} \quad (64)$$

$$B(M^2) = \frac{\alpha(M^2-m^2)(M^2+m^2)^2}{8\pi m^2 M^4} \frac{1}{|h^a|^2} \quad (65)$$

de sorte que les intégrales spectrales peuvent encore s'écrire:

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2+M^2-i\epsilon} \frac{2i \operatorname{Im} g^a(-M^2)}{|g^a(-M^2)|^2} = -2\pi i \int_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2+M^2-i\epsilon} \frac{A(M^2)}{p^2+M^2-i\epsilon} \quad (66)$$

$$\int_{m^2}^{\infty} \frac{dM^2}{p^2 + M^2 - i\epsilon} \frac{2i \operatorname{Im} h^a(-M^2)}{|h^a(-M^2)|^2} = -2\pi i \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{B(M^2)}{p^2 + M^2 - i\epsilon} \quad (67)$$

Pour compléter notre recherche des relations de dispersion que doivent satisfaire les fonction $[1/g(p^2)]$ et $[1/h(p^2)]$, il nous reste encore à évaluer les résidus des fonctions:

$$1/(Z-p^2+i\epsilon)g(Z) \quad \text{et} \quad 1/(Z-p^2+i\epsilon)h(Z)$$

aux pôles, $Z=p^2-i\epsilon$, $Z=\bar{p}_1^2$, $Z=\bar{p}_1^{2*}$ d'une part, $Z=p^2-i\epsilon$, $Z=\bar{p}_2^2$, $Z=\bar{p}_2^{2*}$ d'autre part. Ce calcul est immédiat. Définissons:

$$\Omega_1 = [1/g'(p^2)]_{p^2=\bar{p}_1^2}, \quad \Omega_2 = [1/h'(p^2)]_{p^2=\bar{p}_2^2} \quad (68)$$

et nous obtenons les relations de dispersion sous la forme:

$$\frac{1}{g(p^2)} = \frac{\Omega_1}{p^2 - \bar{p}_1^2} + \frac{\Omega_1^*}{p^2 - \bar{p}_1^{2*}} - \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{A(M^2)}{p^2 + M^2 - i\epsilon} \quad (69)$$

$$\frac{1}{h(p^2)} = \frac{\Omega_2}{p^2 - \bar{p}_2^2} + \frac{\Omega_2^*}{p^2 - \bar{p}_2^{2*}} - \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{B(M^2)}{p^2 + M^2 - i\epsilon} \quad (70)$$

Compte tenu des relations que nous venons d'établir, il est intéressant de trouver les relations satisfaites par les résidus Ω_1 , Ω_2 et leurs complexes conjugués. Cela nous sera utile plus loin, pour la détermination de la fonction causale de propagation. A cause des propriétés (54), nous obtenons:

$$0 = \Omega_1 + \Omega_2^* - \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \cdot A(M^2) \quad (71)$$

$$0 = \Omega_2 + \Omega_2^* - \int_{m^2}^{\infty} dM^2 B(M^2) \quad (72)$$

En se rappelant que les fonctions $g(p^2)$ et $h(p^2)$ ont été réalisées de sorte que $-p^2=m^2$ soit un pôle simple de $\bar{\Delta}_T$, et que à ce même point $\bar{\Delta}_L = 1/m^2$, alors:

$$g(-m^2) = 1, \quad h(-m^2) = 1 \quad (73)$$

Les propriétés (73) appliquées aux relations de dispersion nous donnent de nouvelles relations, à savoir:

$$1 = -\frac{\Omega_1}{\bar{p}_1^2 + m^2} - \frac{\Omega_1^*}{\bar{p}_1^2 + M^2} - \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{A(M^2)}{M^2 - m^2} \quad (74)$$

$$1 = -\frac{\Omega_2}{\bar{p}_2^2 + m^2} - \frac{\Omega_2^*}{\bar{p}_2^2 + m^2} - \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{B(M^2)}{M^2 - m^2} \quad (75)$$

Maintenant nous sommes en mesure d'évaluer l'intégration sur la variable p^0 dans l'expression (51). Désignons par $I^{\mu\nu}$ l'intégrale que nous cherchons à calculer

$$I^{\mu\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp^0}{2\pi i} e^{-ip^0(x^0 - x'^0)} \left\{ [g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}] \bar{\Delta}_T + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \bar{\Delta}_L \right\} \quad (76)$$

Il est à noter que l'origine $p^2=0$ n'est pas une singularité de la fonction à intégrer. Nous allons, d'autre part, utiliser les expressions de $\bar{\Delta}_T$ et $\bar{\Delta}_L$ sous la forme (V-2,11) avec les expressions de $[1/g(p^2)]$ et $[1/h(p^2)]$ données par leurs relations de dispersion.

On voit maintenant l'utilité des relations de dispersion. En effet, nous allons transformer l'intégration pour les valeurs réelles de p^0 , en une intégration le long d'un contour approprié dans le plan complexe p^0 . Les seules singularités que nous avons dans ce plan sont celles apparaissant dans les relations de dispersion et le pôle simple à $-p^2=m^2$, c'est à dire:

$$p^0 = \pm\{[\vec{p}^2+m^2]^{1/2} - i\epsilon\} \quad (77)$$

où nous avons tenu compte du facteur i . Les autres pôles que l'on rencontre sont complexes. Considérons un pôle particulier

$$p^2 = \bar{p}^2 = -(\bar{p}^0)^2 + \vec{p}^2 \quad (78)$$

Il lui correspond un autre pôle, dans la position complexe conjuguée. D'autre part, il est évident qu'un pôle dans le plan complexe p^2 correspond à deux pôles symétriques par rapport à l'origine, dans le plan complexe p^0 , à savoir $\pm\bar{p}^0$. Autrement dit, nous avons dix pôles simples de la fonction à intégrer, dans le plan complexe p^0 , y compris les deux pôles donnés par (77). La fonction à intégrer comprend un terme exponentiel

$$e^{-ip^0(x^0-x'^0)}, \quad x^0 > x'^0 \quad (79)$$

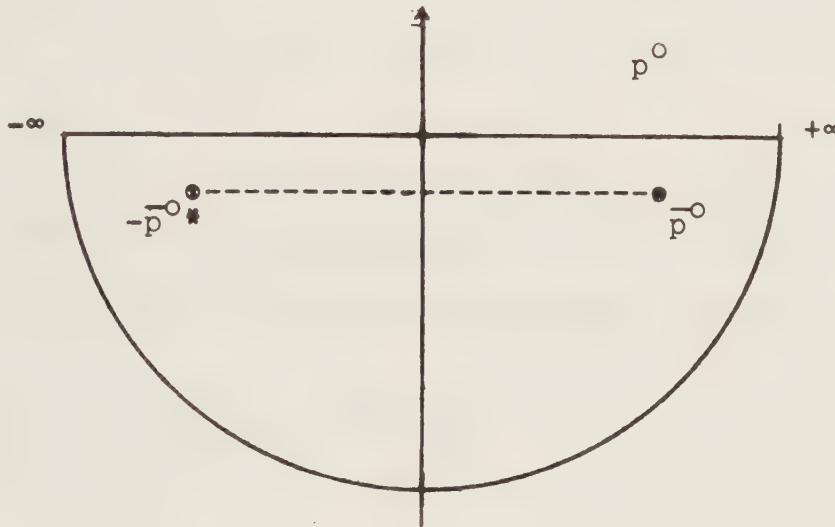
Considérons le prolongement analytique de ce terme dans le plan complexe p^0 . A cause de la restriction causale,

$$|e^{-ip^0(x^0-x'^0)}| = e^{(x^0-x'^0)\text{Im}p^0} \rightarrow 0, \text{ pour } |p^0| \rightarrow \infty \quad (80)$$

si et seulement si

$$\text{Im } p^0 < 0 \quad (81)$$

Par conséquent, nous changeons pas l'évaluation de l'intégrale (76), en lui ajoutant la contribution nulle provenant de l'intégration le long du demi-cercle inférieur à l'infini, dans le plan complexe p^0 .



Nous allons appliquer une fois de plus le théorème de Cauchy, et cette fois-ci au contour fermé, représenté sur la figure ci-dessus, dans le plan p^0 . Pour plus de commodité dans l'évaluation de l'intégral, et comme, à tout pôle $\bar{p}^0$ tombant à l'intérieur du contour considéré, il lui correspond un pôle $-p^0*$, il est utile d'introduire la notion de vecteur complexe p , dont la composante p^0 peut être complexe. Nous définirons le vecteur complexe conjugué du vecteur p de la manière suivante:

$$p = (p^0, \vec{p}) \quad , \quad p^* = (-p^0*, \vec{p}) \quad (82)$$

Cette définition n'est peut-être pas la plus naturelle à avoir,

et seulement si

$$\operatorname{Im} p^0 > 0$$

Par conséquent, nous changeons pas l'évaluation de l'intégral (76), en lui ajoutant la contribution nulle provenant de la partie réelle de p^0 le long du demi-cercle inférieur à l'infini, dans le

mais elle s'avèrera extrêmement utile. Notons, en passant, quelques propriétés découlant de cette définition:

$$(p^\mu)^* \neq p^{*\mu} \quad (83)$$

$$(p^2)^* = p^{*2} \quad (84)$$

$$p \cdot p^* = |p^0|^2 + \vec{p}^2 \text{ reel et non négatif} \quad (85)$$

Le calcul de résidus devient chose simple. L'utilisation des propriétés (74) et (75), nous permet alors d'obtenir des simplifications intéressantes et nous aboutissons au résultat

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu} = & \frac{1}{2p_m^0} [g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}] e^{-ip_m^0(x^0 - x'^0)} \\ & + \frac{1}{2\bar{p}_1^0} \frac{\Omega_1}{\bar{p}_1^2 + m^2} e^{-i\bar{p}_1^0(x^0 - x'^0)} [g^{\mu\nu} - \frac{\bar{p}_1^\mu \bar{p}_1^\nu}{\bar{p}_1^2}] + (\bar{p}_1 \leftrightarrow \bar{p}_1^*) \\ & + \frac{1}{2\bar{p}_2^0} \frac{\Omega_2}{m^2} e^{-i\bar{p}_2^0(x^0 - x'^0)} \frac{\bar{p}_2^\mu \bar{p}_2^\nu}{\bar{p}_2^2} + (\bar{p}_2 \leftrightarrow \bar{p}_2) \\ & + \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{A(M^2)}{M^2 - m^2} \frac{1}{2p_M^0} [g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2}] e^{-ip_M^0(x^0 - x'^0)} \\ & + \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \frac{B(M^2)}{m^2} \frac{1}{2p_M^0} \frac{p^\mu p^\nu}{M^2} e^{-ip_M^0(x^0 - x'^0)} \end{aligned} \quad (86)$$

où le signe $(\bar{p} \leftrightarrow \bar{p}^*)$ signifie "le même terme que le terme précédent, où l'on remplace $\bar{p}$ par $\bar{p}^*$, et le résidu Ω par Ω^* . En

somme, ce serait équivalent de dire que le signe ($\bar{p} \leftrightarrow \bar{p}^*$) signifie "le complexe conjugué du terme qui précède", avec dans l'esprit l'idée de "complexe conjugué" au sens défini par (82).

Pour aboutir au but que nous nous étions tracé au départ, c'est à dire, l'obtention de la fonction causale de propagation, il nous suffit, maintenant, de remplacer l'expression (86) dans l'équation (51).. Mais avant de le faire, et afin d'obtenir une écriture condensée, nous avons besoin d'introduire de nouvelles notations., qui soient en cohérence parfaite avec la notion de vecteurs complexes. La généralisation immédiate de l'invariant de Lorentz, $d\omega_p$, défini par (II-2,15), est la suivante:

$$d\omega_p = \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \quad , \quad d\omega_{p^*} = \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{-2p^{0*}} \quad (87)$$

De même, nous définissons les fonctions de propagation "transversale" et "longitudinale" d'une particule vectorielle de masse complexe ($-p^2$):

$$\Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; -p^2) = i \int d\omega_p e^{ip(x-x')} \left[g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{-p^2} \right] , \quad x^0 > x'^0 \quad (88)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{(L)}(x-x'; -p^2) = i \int d\omega_p e^{ip(x-x')} \frac{p_\mu p_\nu}{-p^2} , \quad x^0 > x'^0 \quad (89)$$

On voit maintenant apparaître l'avantage du système de notations introduit précédemment. En effet, la fonction causale recherchée s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_{\mu\nu}(x-x') &= \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; m^2) \\
&+ \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \left\{ \frac{A(M^2)}{M^2 - m^2} \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; M^2) + \frac{B(M^2)}{m^2} \Delta_{\mu\nu}^{(L)}(x-x'; M^2) \right\} \\
&+ \frac{\Omega_1}{\bar{p}_1^2 + m^2} \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; -\bar{p}_1^2) + \frac{\Omega_1^*}{\bar{p}_1^{2*} + m^2} \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; -\bar{p}_1^{2*}) \\
&+ \frac{\Omega_2}{m^2} \Delta_{\mu\nu}^{(L)}(x-x'; \bar{p}_2^2) + \frac{\Omega_2^*}{m^2} \Delta_{\mu\nu}^{(L)}(x-x'; \bar{p}_2^{2*}) \quad (90)
\end{aligned}$$

On retrouve dans l'expression ci-dessus, la contribution du pôle simple à $-p^2 = m^2$, une contribution spectrale qui provient de la coupure dans le plan complexe p^2 , et enfin, les contributions dues à l'existence des pôles complexes. Ce même résultat aurait pu être obtenu, sans passer par l'intermédiaire des relations de dispersion. La difficulté que nous aurions eu du fait du dédoublement de la coupure dans le plan complexe p^0 , peut être levé, en constatant que la fonction à intégrer a un comportement acceptable à l'infini. Nous avons préféré présenter la méthode utilisant les relations de dispersion, parce qu'elle a l'avantage de donner une justification plus naturelle à la notion d'impulsion complexe, dont seule la composante énergétique est complexe. Nous verrons dans le dernier chapitre l'importance des pôles complexes que nous avons mis en évidence.

VI - La plus simple modification de la fonction de propagation du photon (Création de pair de particules vectorielles)

Nous envisageons le cas d'une source de photons produisant une excitation d'impulsion k et de masse spectrale

$$-k^2 = M^2 \geq (2m)^2 \quad (1)$$

Autrement dit la source considérée émet un photon "virtuel". Ce photon ne se propage pas à grande distance et reste localisé dans le voisinage de la source d'émission J_2 . Nous supposons qu'il produit alors une paire de particule-antiparticule vectorielle. Particule et antiparticule se recombinent pour donner un photon "virtuel" détecté à son tour par la source d'absorption J_1 . Le système que nous étudions n'est autre que celui de particules vectorielles chargées, en présence d'un champ électromagnétique. En appliquant la prescription du couplage minimal, l'action du système considéré s'écrit:

$$W(J,K) = \int(dx) \left\{ A^\mu J_\mu + \Phi^\mu K_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Phi^\mu \Phi_\mu m^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} G^{\mu\nu} [(\partial_\mu - ieq A_\mu) \Phi_\nu - (\partial_\nu - ieq A_\nu) \Phi_\mu] \right\} \quad (2)$$

Par conséquent, le terme additional apparaissant dans l'expression de l'amplitude du vide est

$$\frac{1}{2} \int(dx) G^{\mu\nu} [ieq A_\mu \Phi_\nu - ieq A_\nu \Phi_\mu] \quad (3)$$

De l'expression (3) nous retenons uniquement les termes linéaires du champ électromagnétique A^μ , qui sont seuls responsables du processus que nous étudions, à savoir:

$$V.A. = \frac{1}{2} \int (dx) [\partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu] [ieq A_\mu \phi_\nu - ieq A_\nu \phi_\mu] \quad (4)$$

Nous allons utiliser la technique habituelle de sources effectives en émission et absorption. Ici la description équivalente du processus physique considéré est celle d'une source effective émettant et absorbant une paire vectorielle particule-antiparticule. Dans ces conditions, le terme additionnel apparaissant dans l'expression de l'amplitude du vide s'écrit:

$$V.A. = - \frac{1}{2} \int d\omega_p d\omega_{p'} [iK_1^\mu(-p) K_1^\alpha(-p')]_{eff} (g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}) \\ \times (g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2}) [iK_2^\nu(p) K_2^\beta(p')]_{eff} \quad (5)$$

où nous avons tenu compte de la fonction causale de propagation non modifiée des particules vectorielles, d'impulsion p et p' respectivement ($p+p'=k$), à savoir

$$\Delta_{\mu\nu}(x-x') = i \int d\omega_p e^{ip(x-x')} [g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}] \quad (6)$$

Nous avons deux autres expressions de l'amplitude additionnelle du vide, équivalentes aux deux premières déjà mentionnées, utilisant la définition du champ:

$$V.A. = \frac{1}{2} \int (dx)(dx') \phi_1^\mu(x) [iK_{2\mu}(x) K_{2\nu}(x')]_{eff} \phi_1^\nu(x') \quad (7)$$

$$V.A. = \frac{1}{2} \int (dx)(dx') [iK_1^\mu(x) K_1^\nu(x')]_{eff} \phi_{2\mu}(x) \phi_{2\nu}(x') \quad (8)$$

De façon à rendre possible l'identification entre les différentes expressions que nous d'écrire, mettons (4) sous une forme plus directement utilisable:

$$\begin{aligned} V.A. &= \frac{1}{2} \int (dx)(dx') \{ [\partial^\mu \delta(x-x') \phi^\nu(x') - \partial^\nu \delta(x-x') \phi^\mu(x')] ieq A_\mu(x) \phi_\nu(x) \\ &\quad + [\partial'^\mu \delta(x-x') \phi^\nu(x) - \partial'^\nu \delta(x-x') \phi^\mu(x)] ieq A_\mu(x') \phi_\nu(x') \} \quad (9) \\ &= \frac{1}{2} \int (dx)(dx') \{ [\partial^\mu \delta(x-x') \phi^\nu(x') - \partial^\nu \delta(x-x') \phi^\mu(x')] ieq A_\mu(x) \phi_\nu(x) \\ &\quad + [\partial'^\mu \delta(x-x') g^{\nu\alpha} \phi_\nu(x) - \partial'^\alpha \delta(x-x') g^{\mu\nu} \phi_\nu(x)] ieq A_\mu(x') \phi_\alpha(x') \} \end{aligned}$$

Utilisons l'antisymétrie de la matrice de charge q , nous obtenons:

$$\begin{aligned} V.A. &= \frac{1}{2} \int (dx)(dx') \phi_\nu(x) \{ [\frac{1}{1} \partial^\mu \delta(x-x') g^{\nu\alpha} - \frac{1}{1} \partial^\nu \delta(x-x') g^{\mu\alpha}] eq A_\mu(x) \\ &\quad - [\frac{1}{1} \partial'^\mu \delta(x-x') g^{\nu\alpha} - \frac{1}{1} \partial'^\alpha \delta(x-x') g^{\mu\nu}] eq A_\mu(x') \} \phi_\alpha(x') \quad (10) \end{aligned}$$

En écrivant les champs dans leur représentation d'impulsion, puis en effectuant les intégrations d'espace-temps, l'identification des expressions (7), (8) et (10) nous donne les expressions des sources effectives recherchées, dans leur représentation d'impulsion:

$$[iK_1^\mu(-p) K_1^\alpha(-p')]_{eff} = A_{1\kappa}(-k) T^{\mu\alpha\kappa} eq \quad (11)$$

$$[iK_2^\nu(p) K_2^\beta(p')]_{eff} = eq T^{\nu\beta\lambda} A_{2\lambda}(k) \quad (12)$$

où le tenseur de troisième ordre $T^{\mu\alpha\kappa}$ est le courant de couplage

$$T^{\mu\alpha\kappa} = g^{\mu\alpha}(p-p')^{\kappa} + p'^{\mu}g^{\alpha\kappa} - p^{\alpha}g^{\mu\kappa} \quad (13)$$

Remplaçons les sources effectives apparaissant dans (5) par leurs expressions (11) et (12), en se rappelant la sommation implicite sur les indices de charge, nous obtenons:

$$V.A. = -e^2 \int d\omega_p d\omega_{p'} A_{1\kappa}(-k) T^{\mu\alpha\kappa} \left[g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m^2} \right] \left[g_{\alpha\beta} + \frac{p'_{\alpha}p'_{\beta}}{m^2} \right] T^{\nu\beta\lambda} A_{2\lambda}(k) \quad (14)$$

Nous introduisons, maintenant, la loi de conservation de l'impulsion, $k=p+p'$, en insérant la décomposition de l'unité

$$1 = (2\pi)^3 \int dM^2 d\omega_k \delta(k-p-p') \quad (15)$$

dans l'expression (14). De la sorte, nous pouvons écrire le terme additionnel apparaissant dans l'amplitude du vide sous la forme

$$V.A. = -e^2 \int d\omega_k dM^2 A_{1\kappa}(-k) I^{\kappa\lambda} A_{2\lambda}(k) \quad (16)$$

$$I^{\kappa\lambda}(k) = \int d\omega_p d\omega_{p'} (2\pi)^3 \delta(k-p-p') T^{\mu\alpha\kappa} \left[g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m^2} \right] \left[g_{\alpha\beta} + \frac{p'_{\alpha}p'_{\beta}}{m^2} \right] T^{\nu\beta\lambda} \quad (17)$$

$$= \int d\omega_p d\omega_{p'} (2\pi)^3 \delta(k-p-p') J^{\kappa\lambda} = \langle J^{\kappa\lambda} \rangle \quad (18)$$

On voit bien que la méthode suivie est exactement analogue à celle utilisée au chapitre IV. Dans le cas présent du champ électromagnétique, il est indispensable que le résultat possède l'invariance de jauge. Ceci impose au tenseur $I^{\kappa\lambda}$ la propriété

$$k_{\lambda} I^{\kappa\lambda}(k) = 0 \quad (19)$$

Cette propriété est en effet satisfaite, en remarquant qu'elle s'applique au tenseur $J^{\kappa\lambda}$:

$$k_\lambda J^{\kappa\lambda} = 0 \quad (20)$$

De plus, notons que le tenseur $I^{\kappa\lambda}$ est symétrique. Ceci se voit directement sur l'expression (17): les variables p et p' sont des variables d'intégration, nous pouvons donc les échanger; simultanément, échangeons les indices κ et λ , il est évident que nous retrouvons alors l'expression (17) elle-même.

La seule et unique manière de construire un tenseur de second ordre symétrique et satisfaisant à la propriété (19), est la suivante:

$$I^{\kappa\lambda}(k) = \left[g^{\kappa\lambda} + \frac{k^\kappa k^\lambda}{M^2} \right] I(M^2) \quad (21)$$

où $I(M^2)$ est une fonction scalaire, et puisque le seul scalaire disponible est $-k^2 = M^2$, cette fonction dépend uniquement de M^2 . Après contraction des indices dans l'expression (21), nous obtenons:

$$I^\lambda_\lambda(k) = (4-1) I(M^2) = 3I(M^2) \quad (22)$$

Nous allons commencer par trouver l'expression de $J^{\kappa\lambda}$, puis effectuer la contraction sur ce tenseur, et finalement effectuer l'intégration $d\omega_p d\omega_{p'}$, pour obtenir $I^{\kappa\lambda}(k)$. Laissant de côté les intermédiaires de calculs, nous aboutissons au résultat suivant:

$$J^{\kappa\lambda} = 2\left[1 + \frac{p \cdot p'}{m^2}\right] (p-p')^\kappa (p-p')^\lambda + 2\left[\frac{(pp')^2}{m^2} - m^2\right] g^{\kappa\lambda} - k^\kappa k^\lambda - \frac{2(pp')}{m^2} (p^\kappa p'^\lambda + p'^\kappa p^\lambda) \quad (23)$$

On déduit de la cinématique du problème les relations suivantes:

$$p \cdot p' = -\frac{1}{2} [M^2 - 2m^2] \quad , \quad (p-p')^2 = [M^2 - 4m^2] \quad (24)$$

Ainsi, la contraction des indices, effectuée sur le tenseur $J^{\kappa\lambda}$, nous donne une fonction scalaire indépendante de p et p' :

$$J^\lambda_\lambda = \frac{M^4}{m^2} \left[1 - \frac{4m^2}{M^2}\right] \left[1 + \frac{3m^2}{M^2}\right] \quad (25)$$

de sorte que l'intégration $d\omega_p d\omega_{p'}$, se réduit à une intégrale classique de valeur bien connue:

$$\int d\omega_p d\omega_{p'} (2\pi)^3 \delta(k-p-p') = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[1 - \frac{4m^2}{M^2}\right]^{1/2} \quad (26)$$

En combinant les résultats (25) et (26) nous déduisons la valeur de la fonction scalaire $I(M^2)$, et par conséquent l'expression complète du tenseur $I^{\kappa\lambda}$:

$$I^{\kappa\lambda}(k) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{M^4}{3m^2} \left[1 + \frac{3m^2}{M^2}\right] \left[1 - \frac{4m^2}{M^2}\right]^{3/2} \left[g^{\kappa\lambda} + \frac{k^\kappa k^\lambda}{M^2}\right] \quad (27)$$

Maintenant, il suffit de remplacer $I^{\kappa\lambda}$ de l'équation (16) par sa valeur tirée de (27), nous obtenons alors:

$$V.A. = i \int d\omega_k A_1^\mu(-k) \{f(dM^2) M^4 a(M^2) [g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}]\} A_2^\nu(k) \quad (28)$$

Nous avons introduit une fonction spectrale $a(M)$ qui est donné en fonction de la constante de couplage $\alpha = e^2/4\pi$:

$$a(M^2) = \frac{g}{12\pi m^2} \left[1 + \frac{3m^2}{M^2}\right] \left[1 - \frac{4m^2}{M^2}\right]^{3/2} \quad (29)$$

Utilisons l'identité reliant champ et tenseur électromagnétique dans la représentation d'impulsion:

$$A_1^\mu(-k) \left[g_{\mu\nu} + \frac{\mu}{M^2} \frac{\partial}{\partial k^\nu}\right] A_2^\nu(k) = - \frac{1}{2M^2} F_1^{\mu\nu}(-k) F_{2\nu}(k) \quad (30)$$

de sorte que l'expression finale de l'amplitude du vide est

$$V.A. = i \int d\omega_k (-1/2) F_1^{\mu\nu}(-k) \left\{ \int dM^2 M^2 a(M^2) \right\} F_{2\nu}(k) \quad (31)$$

Maintenant, utilisons les principes fondamentaux de continuité et de généralisation dans l'espace-temps, pour arrangement quelconque des sources d'émission et d'absorption. Ceci fait apparaître des termes de contact, que nous déterminerons plus tard:

$$V.A. = i \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{4}\right) F^{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) \left\{ \int dM^2 M^2 a(M^2) \left[\frac{1}{k^2 + M^2 - i\epsilon} + t.c. \right] \right\} \quad (32)$$

L'action initiale pour un système de photons est

$$W(J) = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \left[A^\mu(-k) J_\mu(k) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) \right] \quad (33)$$

Au facteur i près, le terme additionnel de l'action est donné par l'expression (32). De sorte que l'action totale du système

$$W_{\text{tot}} = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \{ A^\mu(-k) J_\mu(k) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) \\ \times [1 + \int dM^2 M^2 a(M^2) (\frac{1}{k^2 + M^2 - i\epsilon} + \text{t.c.})] \} \quad (34)$$

Utilisons le principe variationnel de l'action (34), nous obtenons de la sorte l'équation de champ:

$$k^2 \{ 1 + \int_{(2m)}^\infty dM^2 M^2 a(M^2) [\frac{1}{k^2 + M^2 - i\epsilon} + \text{t.c.}] \} A^\mu(k) = J^\mu(k) \quad (35)$$

dont nous déduisons la fonction de propagation modifiée du photon dans la représentation d'impulsion

$$\bar{D}_+(k) = \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \frac{1}{1 + \int_{(2m)}^\infty dM^2 M^2 a(M^2) [\frac{1}{k^2 + M^2 - i\epsilon} + \text{t.c.}]} \quad (36)$$

Imposons la condition physique que la fonction de propagation modifiée doit avoir un pôle simple à $k^2=0$, avec un résidu correspondant égal à 1. On voit alors apparaître la nécessité d'avoir au moins un terme de contact, obtenu de la manière suivante:

$$\frac{1}{k^2 + M^2 - i\epsilon} - \frac{1}{M^2} = - \frac{k^2}{M^2} \frac{1}{k^2 + M^2 - i\epsilon} \quad (37)$$

Par suite nous aboutissons à une integrale spectrale

$$-k^2 \int_{(2m)}^\infty dM^2 \frac{a(M^2)}{k^2 + M^2 - i\epsilon} \quad (38)$$

La fonction spectrale $a(M^2)$ donnée par (29) se comporte comme une

constante pour les valeurs élevées de M^2 . Donc l'intégrale spectrale se comporte comme

$$\int \frac{dM^2}{M^2} \quad \text{pour les valeurs élevées de } M^2. \quad (39)$$

Elle est par conséquent logarithmiquement divergente. Bien que ce ne soit pas physiquement justifié, il est nécessaire d'ajouter un terme de contact supplémentaire pour éliminer la divergence, et ce de la manière suivante:

$$\frac{1}{k^2 + M^2 - i\epsilon} - \frac{1}{M^2} + \frac{k}{(M^2)^2} = \frac{(k^2)^2}{(M^2)^2} \frac{1}{k^2 + M^2 - i\epsilon} \quad (40)$$

La théorie des sources ne prévoit aucune limitation sur le nombre de termes de contact à avoir. Jusqu'à présent, nous nous sommes contenté de les choisir de la façon minimale, pour remplir les conditions imposées physiquement par le problème traité. L'idée serait d'essayer de savoir si cette prescription minimale n'a pas un caractère universel. Mais alors, nous aurions une intégrale spectrale (38) qui serait divergente. Nous voulons donc garder la "prescription minimale" et essayer d'éliminer la divergence de nos calculs. Nous nous proposons de suggérer l'idée suivante:

" Une légère déviation de la trajectoire d'une particule
 "chargée s'accompagne toujours de l'émission d'une radiation.
 "Par conséquent, la fonction de propagation effective d'une
 "telle particule est celle que nous avons calculé au chapitre IV.
 "Dans ces conditions pourrions-nous éliminer la divergence signalée?"

VII - Création de pair de particules vectorielles

(corrections radiatives)

Dans ce chapitre, nous allons reprendre le problème du chapitre VI, c'est à dire, déterminer la fonction de propagation modifiée du photon, mais en tenant compte du fait qu'une description plus complète d'une particule chargée, est celle où cette particule émet des radiations tout le long de sa trajectoire. Le but est alors de voir si la divergence mise en évidence au chapitre précédemment peut être éliminer, sans l'apport d'un terme additionnel de contact.

La marche à suivre est identique à celle utilisée au chapitre VI. L'action d'un système de particules chargées de spin 1 accompagnées d'émission de photons tout le long de leurs trajectoires est

$$W = \int (dx)(dx') K_1^\mu(x) \bar{\Delta}_{\mu\nu}(x-x') K_2^\nu(x') \quad (1)$$

La fonction $\bar{\Delta}_{\mu\nu}(x-x')$ est la fonction de propagation modifiée des particules vectorielles tel que donnée par (V-4,90). La description équivalente du processus considéré est celui de sources vectorielles échangeant entre elles deux particules de charges opposées, décrites par des fonctions de propagation $\bar{\Delta}_{\mu\nu}(x-x')$, de sorte que le terme additionnel de l'amplitude du vide est

$$\begin{aligned} \text{V.A.} = \frac{1}{2} \int (dx)(dx') [iK_1^\mu(x) K_1^\alpha(y)]_{\text{eff}} \bar{\Delta}_{\mu\nu}(x-x') \bar{\Delta}_{\alpha\beta}(y-y') \\ [iK_2^\nu(x') K_2^\beta(y')]_{\text{eff}} (dy)(dy') \quad (2) \end{aligned}$$

Nous avons donc à étudier le produit $\bar{\Delta}_{\mu\nu}(x-x')\Delta_{\alpha\beta}(y-y')$, autrement dit, le produit de 7 termes par 7 termes. Reportons-nous à l'expression (V-4,90) et rappelons que le premier terme correspond à la fonction de propagation libre, les deux suivants correspondent à la coupure mise en évidence dans le plan complexe p^2 , nous les appellerons "termes de coupure", enfin les quatre derniers correspondent aux quatre pôles, et nous les appellerons "termes complexes"

Commençons par laisser de côté les "termes complexes". Le produit des deux fonctions de propagation modifiée s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Delta}_{\mu\nu}(x-x') \bar{\Delta}_{\alpha\beta}(y-y') &= \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; m^2) \Delta_{\alpha\beta}^{(T)}(y-y'; m^2) \\
 &+ \int_{m^2}^{\infty} dM^2 \left\{ \frac{A(M^2)}{(M^2 - m^2)} [\Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; M^2) \Delta_{\alpha\beta}^{(T)}(y-y'; M^2) \right. \\
 &\quad \left. + \Delta_{\alpha\beta}^{(T)}(y-y'; M^2) \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; M^2)] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{B(M^2)}{m^2} [\Delta_{\mu\nu}^{(L)}(x-x'; M^2) \Delta_{\alpha\beta}^{(T)}(y-y'; M^2) \right. \\
 &\quad \left. + \Delta_{\alpha\beta}^{(L)}(y-y'; M^2) \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; M^2)] \right\} \\
 &+ \int dM^2 dM'^2 \left\{ \frac{A(M^2)A(M'^2)}{(M^2 - m^2)(M'^2 - m^2)} \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; M^2) \Delta_{\alpha\beta}^{(T)}(y-y'; M'^2) \right. \\
 &\quad + \frac{B(M^2)B(M'^2)}{m^4} \Delta_{\mu\nu}^{(L)}(x-x'; M^2) \Delta_{\alpha\beta}^{(L)}(y-y'; M'^2) \\
 &\quad + \frac{A(M^2)B(M'^2)}{m^2(M^2 - m^2)} \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; M^2) \Delta_{\alpha\beta}^{(L)}(y-y'; M'^2) \\
 &\quad \left. + \frac{A(M'^2)B(M^2)}{m^2(M'^2 - m^2)} \Delta_{\mu\nu}^{(L)}(x-x'; M^2) \Delta_{\alpha\beta}^{(T)}(y-y'; M'^2) \right\} \\
 &+ \text{termes comportant les "termes complexes"}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Cette expression (3) est à remplacer dans (2). Pour illustrer le genre de terme que nous aurons, considérons la forme générale

$$\frac{1}{2} \int (dx)(dx')(dy)(dy') [iK_1^\mu(x)K_1^\alpha(y)]_{\text{eff}} \Delta_{\mu\nu}^{(T)}(x-x'; -p^2) \\ \times \Delta_{\alpha\beta}^{(T)}(y-y'; -p'^2) [iK_2^\nu(x')K_2^\beta(y')]_{\text{eff}} \quad (4)$$

où $-p^2$ et $-p'^2$ peuvent être tout aussi bien réels et positifs que complexes. Utilisons les définitions (V-4,88 et 89), le terme de forme générale devient

$$- \frac{1}{2} \int (dx)(dx')(dy)(dy') d\omega_p d\omega_{p'} e^{ip(x-x')} e^{ip'(y-y')} \\ [iK_1^\mu(x)K_1^\alpha(y)]_{\text{eff}} [g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{-p^2}] [g_{\alpha\beta} + \frac{p'_\alpha p'_\beta}{-p'^2}] [iK_2^\nu(x')K_2^\beta(y')]_{\text{eff}} \quad (5)$$

Effectuons les intégrations sur les variables x, x', y, y' :

$$- \frac{1}{2} \int d\omega_p d\omega_{p'} [iK_1^\mu(-p)K_1^\alpha(-p')]_{\text{eff}} [g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{-p^2}] [g_{\alpha\beta} + \frac{p'_\alpha p'_\beta}{-p'^2}] [iK_2^\nu(p)K_2^\beta(p')]_{\text{eff}} \quad (6)$$

Les impulsions p et p' peuvent avoir en générale une composante énergétique complexes. Par suite, nous voyons apparaître la possibilité d'une extension de la notion de source, qui serait capable d'émettre des impulsions complexes non physiques. Rejetons, pour l'instant, une telle possibilité, et supposons que $K(p)=0$, si p^0 est complexe. Alors, la contribution des "termes complexes" dans (3) est identiquement nulle. Le premier terme de l'expression (3) nous donne exactement le calcul effectué au chapitre (VI), et par suite, nous donne un terme divergeant. Les termes additionnels

contribuent de façon additive, et, par conséquent, ne peuvent agir de façon à éliminer la divergence du premier terme. Il est trop long de prendre les termes de (3) un à un et de démontrer qu'ils donnent tous une contribution positive. Toutefois, nous allons donner la méthode générale de démonstration, en considérant un terme typique du genre (6), où:

$$-p^2 = M^2, \quad -p'^2 = M'^2 \quad (7)$$

Les expressions des sources effectives sont toujours données par (VI, 11 et 12), avec

$$-k^2 = M''^2 \geq (M+M')^2, \quad k = p + p' \quad (8)$$

Le calcul est, par conséquent, une généralisation de ce qui a été fait au chapitre VI, mais la dynamique envisagée est plus compliquée. De plus, le terme (6) est donné par la même expression que (VI,14), mais la loi de conservation de l'impulsion (8), donne lieu à une nouvelle décomposition de l'unité

$$1 = \int d\omega_k dM''^2 (2\pi)^3 \delta(k-p-p') \quad (9)$$

De la sorte, l'intégrale de base (VI,26) à une expression ^{fonction} des variables dynamiques, M, M', M'' . Le calcul montre que

$$\begin{aligned} \int d\omega_p d\omega_{p'} (2\pi)^3 \delta(k-p-p') &= \frac{1}{(4\pi)^2} \{ [1 - (\frac{M+M'}{M''})^2] [1 - (\frac{M-M'}{M''})^2] \}^{1/2} \quad (10) \\ &\equiv I_0(M, M', M'') \end{aligned}$$

L'expression generalisée du tenseur $J^{k\lambda}$ est

$$J^{k\lambda} = [p^2 + p'^2 + \frac{(pp')^2}{M'^2} + \frac{(pp')^2}{M^2}] g^{k\lambda} + p^k p^\lambda + p'^k p'^\lambda - [3 + \frac{pp'}{M^2} + \frac{pp'}{M'^2}] [p^k p'^\lambda + p^\lambda p'^k] \quad (11)$$

Signalons certaines formules de base tel que

$$p \cdot p' = \frac{1}{2} [M'^2 - M''^2 + M^2], \quad k \cdot p = -\frac{1}{2} [M''^2 + M'^2 - M^2] \\ k \cdot p' = -\frac{1}{2} [M''^2 - M'^2 + M^2] \quad (12)$$

Définissons la quantité $\langle (...) \rangle$ de la façon suivante:

$$\langle (...) \rangle = \int d\omega_p d\omega_{p'} (2\pi)^3 \delta(k-p-p') (...) / I_0(M, M', M'') \quad (13)$$

qui est un genre de valeur moyenne prise sur l'intégrale de base donnée par l'expression (10). Nous avons donc à calculer la quantité $I_0 \langle J^{k\lambda} \rangle$, et, par conséquent, nous avons besoin d'évaluer $\langle p^k p^\lambda \rangle$, $\langle p'^k p'^\lambda \rangle$, $\langle p^k p'^\lambda \rangle$. Ces quantités sont des tenseurs de second ordre, et doivent nécessairement s'exprimer en fonction de $g^{k\lambda}$ et de $k^k k^\lambda$. Par suite:

$$\langle p^k p^\lambda \rangle = a g^{k\lambda} + b k^k k^\lambda \quad (14)$$

$$\langle p'^k p'^\lambda \rangle = a' g^{k\lambda} + b' k^k k^\lambda \quad (15)$$

$$\langle p'^k p^\lambda \rangle = a'' g^{k\lambda} + b'' k^k k^\lambda \quad (16)$$

Les fonctions a, a', a'', b, b', b'' sont des fonctions de M, M', M'' .

Elles s'obtiennent en utilisant une méthode tout à fait analogue à celle employée au chapitre IV. Les résultats sont les suivants:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{12M''^2} \{ [M''^2 + M^2 - M'^2]^2 - 4M^2 M''^2 \} \\
 b &= \frac{1}{3M''^4} \{ [M''^2 + M^2 - M'^2]^2 - M^2 M''^2 \} \\
 a' &= \frac{1}{12M''^2} [2M''^2 (M'^2 + M^2 - M''^2) + M''^4 - M'^4 - M^4 + 2M^2 M'^2] \\
 b' &= \frac{1}{6M''^4} [2M''^4 - 2(M'^2 - M^2)^2 + (M'^2 + M^2 - M''^2)^2] \\
 a'' &= \frac{1}{12M''^2} \{ [M''^2 + M'^2 - M^2]^2 - 4M'^2 M''^2 \} \\
 b'' &= \frac{1}{3M''^4} \{ [M''^2 + M'^2 - M^2]^2 - M'^2 M''^2 \} \tag{17}
 \end{aligned}$$

Enfin, le résultat final s'obtient en fonction de ces quantités:

$$\begin{aligned}
 I_{\circ} \langle J^{\kappa\lambda} \rangle &= I_{\circ} \{ a + a'' - 2a' [3 + p \cdot p' (\frac{1}{M'^2} + \frac{1}{M^2})] + [p^2 + p'^2 + (pp')^2 (\frac{1}{M'^2} + \frac{1}{M^2})] \} g^{\kappa\lambda} \\
 &\quad + I_{\circ} \{ b + b'' - 2b' [3 + (p \cdot p') (\frac{1}{M'^2} + \frac{1}{M^2})] \} k^{\kappa} k^{\lambda} \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\equiv I_{\circ}(M, M', M'') [A(M, M', M'') g^{\kappa\lambda} + B(M, M', M'') k^{\kappa} k^{\lambda}] \tag{19}$$

L'on vérifie que les fonctions $A(M, M', M'')$ et $B(M, M', M'')$ sont non négatives, de sorte que la divergence signalée au chapitre VI ne peut être levée, si nous faisons l'hypothèse que les sources ne peuvent pas émettre des énergies complexes.

Toutefois, il n'a pas été encore prouvé que la divergence pourrait être éliminée, en introduisant la notion généralisée de sources émettant des particules d'énergies complexes. Il semble, à première vue, que de telles sources puissent donner des résultats physiques cohérents; après tout, les résonances sont bien associées à des énergies possédant une partie imaginaire, bien que de très faible valeur .

VIII - Bibliographie

- 1 - J. Schwinger, Phys. Rev. 152, 1219 (1966)
- 2 - J. Schwinger, Phys. Rev. 158, 1391 (1967)
- 3 - J. Schwinger, Particles and Sources (Gordon and Breach Science Publishers, Inc., N.Y., 1969)
- 4 - J. Schwinger, Cours donnés à l'Université de Harvard de 1966 à 1970.
- 5 - J. Schwinger, Particles, Sources and Fields (Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1970)
- 6 - J. Schwinger, Unit Spin propagation function and Form Factors
Phys. Rev. (doit paraître bientôt)
- 7 - J.D. Lee & C.N. Yang, Phys. Rev. 128, 885 (1962)
- 8 - G. Salzman & F. Salzman, Phys. Letters, 15, 91 (1965)
Nuovo Cimento, 41, 443 (1966)
- 9 - Sheinblatt & Arnowitt, Phys. Rev. D_{11} , 1603 (1970)

